

ALOCAÇÃO DE TAREFAS EM UMA EMPRESA LOGÍSTICA POR MEIO DE UM ALGORITMO BASEADO NO GENERALIZED ASSIGNMENT PROBLEM

Luana de Azevedo de Oliveira
luazevedo@id.uff.br
UFF

Marcos Costa Roboredo
mroboredo@id.uff.br
UFF

Carlos Francisco Simões Gomes
cfsg1@bol.com.br
UFF

Marcos dos Santos
marcosdossantos_doutorado_uff@yahoo.com.br
IME

Resumo:Objetivo: O objetivo deste estudo foi encontrar uma alocação eficiente das tarefas para equilibrar a carga de trabalho entre os funcionários e maximizar a pontuação total da atribuição. Metodologia: A metodologia envolveu a formulação de um modelo matemático, implementando em Python e a análise dos resultados obtidos. Descrição do Problema: O problema abordado consiste na alocação de tarefas em uma empresa logística, levando em consideração a maximização da pontuação e o controle da diferença máxima de minutos trabalhados entre os funcionários. Resultado: Por meio do modelo matemático, obteve-se uma distribuição equilibrada das tarefas, maximizando a pontuação total da atribuição. A abordagem utilizada foi capaz de encontrar uma solução ótima, considerando as restrições estabelecidas. Benefícios/Vantagens: Os benefícios incluem otimização da distribuição das tarefas, maximização da pontuação, equilíbrio da carga de trabalho, aumento da eficiência operacional e melhor aproveitamento dos recursos humanos disponíveis. Limitações/Desvantagens: O modelo possui limitações, como a especificidade das restrições e critérios, que podem não ser aplicáveis a todas as empresas logísticas, além da dependência de dados precisos e atualizados para uma alocação eficiente. Conclusão: Em conclusão, a abordagem adotada permitiu alcançar uma alocação eficiente de tarefas, equilibrando a distribuição de responsabilidades entre os funcionários e maximizando a pontuação.

Palavras Chave: SCM - Pesquisa Operacional - Agentes - Atividades - Prestação de serviço

1. INTRODUÇÃO

A gestão da cadeia de suprimentos ou Supply Chain Management (SCM), de acordo com o Conselho de Profissionais de Gestão da Cadeia de Suprimentos ou Council of Supply Chain Management Professionals (CSCMP), desempenha um papel fundamental no sucesso das empresas que atuam no setor de prestação de serviços logísticos. Ela envolve o planejamento e gerenciamento de todas as atividades relacionadas à compra, aquisição, conversão e logística. A coordenação e colaboração com parceiros, como fornecedores, intermediários, prestadores de serviços terceirizados e clientes, são igualmente importantes para garantir o bom funcionamento da SCM.

Nesse contexto, segundo Gomes e Ribeiro (2013), a logística empresarial estuda como a gerência pode elevar o nível de rentabilidade dos serviços de distribuição aos clientes e consumidores, por meio de um planejamento organizado e controle efetivo das atividades de movimentação e armazenagem.

De acordo com Scott *et al.* (2011), a entrega de produtos e serviços pode aumentar a satisfação do cliente e gerar novos negócios. Para isso, são considerados os seguintes elementos:

- Cumprir com a entrega prometida;
- Atender e superar as expectativas do cliente;
- Recuperar possíveis falhas no serviço.

Segundo Gomes e Ribeiro (2013), para que ocorra uma entrega produtiva, é necessário que ela seja feita no momento certo, quando o cliente e o fornecedor chegarem a um acordo sobre o horário de entrega, e na quantidade correta.

Ao considerar esses elementos, as empresas de prestação de serviços logísticos podem estabelecer uma vantagem competitiva, ao garantir a qualidade do serviço e a satisfação dos clientes. A adoção de boas práticas de SCM e o cumprimento das expectativas dos clientes auxiliam na contribuição para o sucesso no mercado altamente competitivo.

Com base nesse contexto, o objetivo principal é maximizar a pontuação geral ao atribuir as tarefas de uma empresa prestação de serviços logísticos, buscando otimizar a produtividade e qualidade do trabalho realizado. No entanto, é crucial equilibrar essa maximização com a distribuição equitativa das tarefas. O modelo proposto visa minimizar a maior diferença em minutos trabalhados no mês entre quaisquer dois funcionários. Em resumo, busca-se encontrar uma alocação de tarefas que maximize a pontuação total, considerando simultaneamente a restrição da maior diferença de minutos trabalhados entre os funcionários.

Para alcançar esse objetivo, foi desenvolvida uma nova abordagem que se baseia no Generalized Assignment Problem (GAP), problema de otimização combinatória.

Este artigo está estruturado em oito seções. A primeira seção é a introdução; a segunda seção aborda a fundamentação teórica; a terceira seção descreve a revisão bibliográfica; a quarta seção apresenta a definição do problema; a quinta seção trata da metodologia; a sexta seção aborda o estudo de caso; a sétima seção contém as conclusões; e, por fim, a oitava seção é dedicada às referências bibliográficas.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 PESQUISA OPERACIONAL

As primeiras atividades formais da Pesquisa Operacional, foram iniciadas na Inglaterra durante a Segunda Guerra Mundial, e após o fim da guerra, as ideias propostas para operações

militares foram adaptadas para melhorar a eficiência e produtividade no setor civil. (Taha, 2008).

Segundo Hillier e Lieberman (2013), a Pesquisa Operacional envolve “pesquisa sobre operações”. Sendo, a Pesquisa Operacional aplicada a problemas que compreendem a condução das atividades em uma empresa e tem sido amplamente aplicada em áreas tão distintas como manufatura, transportes, planejamento financeiro, assistência médica etc.

Conforme Santos et al. (2017), a Pesquisa Operacional utiliza diversos modelos matemáticos e/ou lógicos, com o intuito de resolver problemas reais, de forma multidisciplinar.

Para Cinelli *et al.* (2020), a Pesquisa Operacional pode ser interpretada como um conjunto de modelos matemáticos que oportunizam o apoio à tomada de decisão.

2.2 GENERALIZED ASSIGNMENT PROBLEM (GAP)

O problema de atribuição generalizada (GAP) é um dos problemas mais conhecidos na otimização combinatória, e que tem sido utilizado em muitas situações do mundo real. (Alsaad *et al.*, 2020).

O GAP tem sido objeto de extenso estudo e pesquisa, resultando no desenvolvimento de algoritmos e técnicas específicas para sua resolução.

No ano de 1975, Ross e Soland introduziram uma nova abordagem para o Problema de Atribuição Generalizada (Generalized Assignment Problem - GAP) e cunharam o termo para descrever o problema de programação linear que envolve a atribuição de múltiplas tarefas a agentes, levando em consideração suas respectivas limitações.

A formulação matemática do problema de atribuição de tarefas descrita por Ross e Soland (1975) é a seguinte:

As constantes são definidas como:

- c_{ij} = custo da tarefa j sendo atribuído ao agente i ;
- r_{ij} = quantidade de recursos necessários para tarefa j pelo agente i ;
- r_i = unidade de recursos disponíveis para o agente i .

As variáveis de decisão são definidas como:

- $\begin{cases} 1, & \text{se a tarefa } j \text{ for atribuído ao agente } i; \\ 0, & \text{senão.} \end{cases}$

O modelo matemático é definido como:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij}, \\ \text{Sa. } & \sum_{j \in J} r_{ij} x_{ij} \leq b_i \text{ para todo } i \in I \\ & \sum_{j \in J} x_{ij} = 1 \text{ para todo } j \in J \\ & x_{ij} = 0 \text{ ou } 1 \end{aligned}$$

3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A revisão de literatura foi realizada na Base Scopus e na Web of Science, utilizando as strings (TITLE: (“ASSIGNMENT”) OR (“ASSIGNMENT PROBLEM”) OR (“GENERALIZED ASSIGNMENT PROBLEM”) AND (“TASKS”). Essa busca resultou em uma seleção de artigos relevantes sobre o tema com destaque para os seguintes artigos:

Kalel *et al.* (2020) demonstraram o problema de atribuição generalizada (GAP – Generalized Assignment Problem), para reatribuir tarefas aos funcionários disponíveis nas empresas do Iraque quando um deles estiver ausente.

Networks e Ren (2022) revelaram o problema de atribuir tarefas aos dispositivos e otimizar a duração do carregamento do HAP, ponto de acesso híbrido de uma rede de IoT de radiofrequência por meio de um novo modelo de Programação Linear Inteiro Mista (PLIM).

Gopalakrishnan e Borrajo (2022) definiram um problema no qual a execução de tarefas é distribuída, e pressupõe que os seres humanos possam interromper suas tarefas quando outras tarefas de maior prioridade estiverem prontas para serem realizadas, por meio de dois algoritmos baseados em Busca Tabu e Busca em árvore de Monte Carlo.

Kakimura *et al.* (2022) utilizaram o teorema de representação de Birkhoff para um problema de otimização de duas tarefas a serem processadas, e atribuir a um conjunto de trabalhadores para maximizar a soma dos lucros.

Gallet-Delport e Fauconnier (2018) apresentaram uma nova variante do problema de alocação que foi chamada problema de atribuição, na qual os processadores podem sair apenas tendo conhecimento parcial dos itens atribuídos a eles e os itens restantes nos processadores podem ser eventualmente anunciados por outros processadores.

Seda (2022) estudou o problema de atribuição e suas modificações com aplicações em logística, tarefas de roteamento, distribuição e agendamento, e correlacionou os modelos de problemas que muitas vezes são distintos em natureza e complexidade temporal.

Jain *et al.* (2022) demonstraram por meio de uma versão modificada do algoritmo Salp Swarm Algorithm para resolver problemas de atribuições de tarefas e problemas fundamentais de otimização combinatória.

A revisão de literatura nas bases Scopus e Web of Science proporcionou uma visão ampla dos problemas de atribuição e suas soluções propostas. Esses estudos fornecem uma base sólida para o desenvolvimento de abordagens eficientes e inovadoras na área de otimização e tomada de decisão em tarefas de atribuição.

4. DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

O Problema de Atribuição Generalizada (GAP) é um problema de otimização que envolve a alocação eficiente de um conjunto de tarefas a um grupo de agentes, levando em consideração as habilidades, custos e restrições associadas a cada tarefa e agente.

Nesse contexto foi desenvolvida uma nova abordagem que se baseia no Generalized Assignment Problem (GAP) no setor administrativo de uma empresa de prestação de serviços logísticos. Essa abordagem foi aplicada para solucionar o problema de alocação de tarefas.

Inicialmente, o contrato de prestação de serviços foi estabelecido com apenas dois funcionários. Posteriormente, a equipe foi expandida com a contratação de mais dois funcionários, totalizando um grupo de quatro colaboradores.

No entanto, mesmo após a contratação dos novos membros, a maioria das tarefas continuou sendo atribuída aos dois funcionários iniciais, enquanto os outros dois funcionários permaneciam com poucas tarefas atribuídas a eles. Essa distribuição desigual das tarefas resultou em uma sobrecarga de trabalho para os funcionários contratados inicialmente, enquanto os dois funcionários mais recentes não estavam utilizando totalmente suas capacidades.

Diante dessa situação o modelo matemático desenvolvido considerou as capacidades e restrições associadas a cada tarefa e agente. O objetivo hierárquico desse problema é maximizar a eficiência global e minimizar a sobrecarga de trabalho. O foco é maximizar a pontuação geral,

ou seja, atribuir as tarefas de forma a maximizar a produtividade e qualidade do trabalho realizado. No entanto, é necessário balancear essa maximização com a distribuição equitativa das tarefas, evitando sobrecarregar alguns colaboradores em detrimento de outros.

O modelo proposto busca minimizar a maior diferença em minutos trabalhados no mês entre dois funcionários quaisquer. Ele considera restrições como a disponibilidade de funcionários para cada tarefa, o tempo necessário para a execução de cada tarefa e a carga de trabalho diária máxima permitida. O objetivo é encontrar uma atribuição de tarefas que maximize a pontuação total, levando em conta a restrição da maior diferença de minutos trabalhados entre os funcionários.

Ao resolver o problema, o modelo visa realocar as tarefas de forma a equilibrar a carga de trabalho entre os funcionários, garantindo a eficiência global e a equidade na distribuição das tarefas.

5. METODOLOGIA

O procedimento adequado para esta pesquisa, consiste em um estudo de caso em uma empresa logística, onde será analisado um problema específico de alocação de tarefas. Para solucionar esse problema, foi proposto uma solução utilizando um modelo baseado no Generalized Assignment Problem (GAP), com o desenvolvimento de um código na linguagem Python por meio da biblioteca Pyomo, que oferece amplos recursos para construir e resolver modelos de otimização.

A coleta dos dados necessários para o estudo foi realizada por meio de entrevistas semiestruturadas com o gestor e colaboradores da empresa. Essas entrevistas ajudaram a identificar e compreender melhor o problema em questão, fornecendo informações preciosas para a construção da pesquisa. A Figura 1 ilustra o procedimento metodológico que será seguido ao longo do estudo, fornecendo uma visão geral das etapas envolvidas.

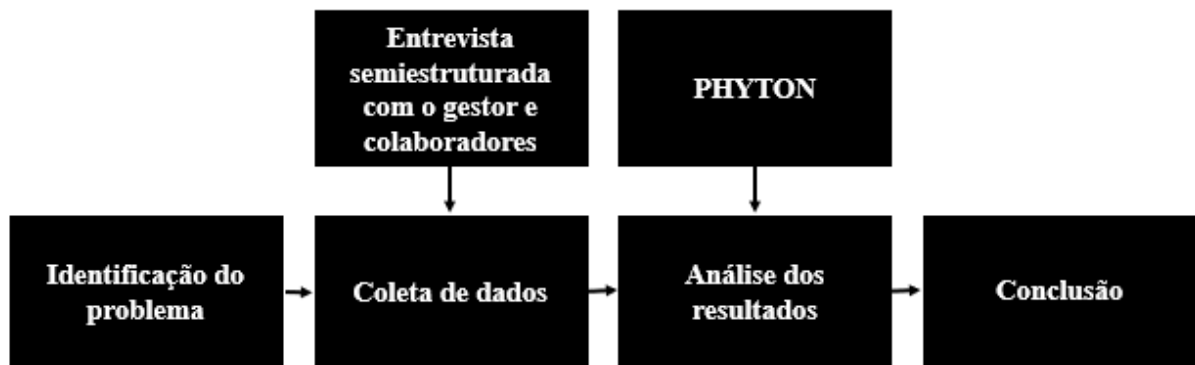


Figura 1: Metodologia utilizada no artigo
Fonte: Autores (2023)

6. ESTUDO DE CASO

O estudo foi conduzido em uma empresa de serviços logísticos, com o objetivo de assegurar a confidencialidade dos dados sensíveis e proteger a privacidade das empresas que utilizam os serviços da empresa, e para garantir a segurança das informações. Foram utilizados dados fictícios, ajustados de forma coerente e próximos aos valores reais. Essa abordagem permitiu ilustrar o funcionamento do modelo utilizado, ao mesmo tempo em que preservou o sigilo dos dados reais da empresa.

Para a elaboração do modelo, foram coletados dados que incluem: a quantidade de tarefas atribuídas à equipe e o tempo de execução de cada atividade. Além disso, foi conduzida uma entrevista semiestruturada com o gestor para obter informações sobre a pontuação

atribuída a cada funcionário da equipe. Esses dados foram essenciais para a construção de um modelo preciso e representativo das características da equipe e das atividades realizadas.

A tabela 1, apresenta as atividades realizadas semanalmente, fornecendo informações importantes para a análise e otimização do processo.

A tabela 2, exibe as atividades realizadas em dias específicos do mês, levando em consideração que, se o dia programado cair em um fim de semana, a atividade será realizada no próximo dia útil. Isso garante a continuidade e eficiência do fluxo de trabalho, adaptando-se às particularidades do calendário mensal.

A tabela 3, apresenta a pontuação atribuída pelo gestor a cada membro da equipe, a qual é composta por quatro funcionários. Essa pontuação reflete a avaliação do desempenho de cada indivíduo e é um importante indicador para a alocação eficiente das tarefas.

Tabela 1 – Tarefas Semanais

Atividades	Segunda-feira	Terça-feira	Quarta-feira	Quinta-feira	Sexta-feira
Tarefa 4	-	-	-	-	04:00
Tarefa 6	00:30	00:30	00:30	00:30	00:30
Tarefa 12	-	-	-	8:00	-
Tarefa 13	-	-	-	2:00	-
Tarefa 14	08:00	-	-	-	-
Tarefa 15	-	-	06:00	-	-
Tarefa 16	02:00	02:00	02:00	02:00	02:00
Tarefa 17	04:00	-	-	-	-

Fonte: Autores 2023

Tabela 2 – Tarefas em dias específicos

Atividades	Todo dia 02	Todo dia 06	Todo dia 08	Todo dia 09	Todo dia 10	Todo dia 30	Todo dia 27	Todo dia 30
Tarefa 1	-					-	8:00	08:00
Tarefa 2	3:00					-	-	-
Tarefa 3	6:00					-	6:00	6:00
Tarefa 5				06:00	06:00			
Tarefa 7		02:00						
Tarefa 8		03:00						
Tarefa 9								08:00
Tarefa 10							06:00	06:00
Tarefa 11		06:00						

Fonte: Autores 2023

Tabela 3 – Pontuação atribuída pelo gestor a cada funcionário

Atividades	Funcionário 1	Funcionário 2	Funcionário 3	Funcionário 4
Tarefa 1	6	6	10	7
Tarefa 2	10	8	10	8
Tarefa 3	7	7	8	7
Tarefa 4	10	8	10	8
Tarefa 5	7	5	9	10
Tarefa 6	7	5	9	10
Tarefa 7	8	6	10	10
Tarefa 8	3	5	7	9
Tarefa 9	3	5	7	9
Tarefa 10	6	6	10	7
Tarefa 11	7	5	8	7
Tarefa 12	10	7	8	7
Tarefa 13	7	10	8	9

Tarefa 14	6	10	7	7
Tarefa 15	6	10	7	7
Tarefa 16	7	10	8	5
Tarefa 17	8	7	8	7

Fonte: Autores 2023

6.1 MODELO PROPOSTO

O modelo proposto consiste em dois modelos que compartilham os mesmos parâmetros de entrada e conjunto de variáveis, diferindo apenas na função objetivo.

6.2 PARÂMETROS DE ENTRADA

- $NF \rightarrow$ Conjunto de funcionários.
- $CT \rightarrow$ Conjunto de tarefas.
- $ND \rightarrow$ Conjunto de dias.
- $p_{ij} \rightarrow$ Pontuação do funcionário i na tarefa j .
- $T_{jk} \rightarrow$ Tempo necessário em horas para executar a tarefa j no dia k .
- $Max_{dia} \rightarrow$ Tempo máximo em minutos por dia que um funcionário trabalha em um único dia.
- $a_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{se a tarefa } j \text{ existe no dia } k; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$

6.3 VARIÁVEIS

- $x_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{se o funcionário } i \text{ será responsável pela tarefa } j \text{ no dia } k; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$
- $y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se o funcionário } i \text{ será responsável pela tarefa } j; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$
- $t_{ik} \rightarrow$ Minutos trabalhados pelo funcionário i no dia k .
- $z_i \rightarrow$ Minutos trabalhados pelo funcionário i no mês todo.
- $d \rightarrow$ Maior diferença em minutos trabalhados no mês considerando dois funcionários.

6.4 MODELO 1

6.4.1 Função Objetivo

Como se deseja, a minimização de “ d ” a função objetivo fica definido pela maior diferença em minutos trabalhados no mês entre quaisquer dois funcionários.

Minimizar d

6.4.2 Restrições

$$\text{s.a.} \quad \sum_{i=1}^{nf} y_{ij} = 1 \quad \forall j = 1, \dots, nt;$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{nf} x_{ijk} &= a_{jk} & \forall j = 1, \dots, nt; k = 1, \dots, nd \\
 a_{jk} y_{ij} &> \text{igual} x_{ijk} & \forall i = 1, \dots, nf, j = 1, \dots, nt; k = 1, \dots, nd \\
 t_{ik} &= \sum_{j=1}^{nt} T_{jk} x_{ijk} & \forall i = 1, \dots, nf; k = 1, \dots, nd \\
 t_{ik} &\leq \text{Max}_{dia} & \forall i = 1, \dots, nf; k = 1, \dots, nd \\
 z_i &= \sum_{k=1}^{nd} t_{ik} & \forall i = 1, \dots, nf \\
 d &\geq z_i - z_j & \forall i, j = 1, \dots, nf \text{ com } i \neq j \\
 x_{ijk} &\in \{0,1\} & \forall i, j, k \\
 y_{ij} &\in \{0,1\} & \forall i, j \\
 t_{ik} &\in Z_+ & \forall i, k \\
 z_i &\in Z_+ & \forall i \\
 d &\in Z_+
 \end{aligned}$$

6.5 MODELO 2

6.5.1 Função Objetivo

A função objetivo do modelo é a maximização da soma das pontuações atribuídas aos funcionários na atribuição de tarefas.

$$\text{Maximizar } \sum_{i=1}^{nf} \sum_{j=1}^{nt} \sum_{k=1}^{nd} p_{ij} x_{ijk}$$

6.5.2 Restrições

s.a.

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{nf} y_{ij} &= 1 & \forall j = 1, \dots, nt; \\
 \sum_{i=1}^{nf} x_{ijk} &= a_{jk} & \forall j = 1, \dots, nt; k = 1, \dots, nd \\
 a_{jk} y_{ij} &> \text{igual} x_{ijk} & \forall i = 1, \dots, nf, j = 1, \dots, nt; k = 1, \dots, nd \\
 t_{ik} &= \sum_{j=1}^{nt} T_{jk} x_{ijk} & \forall i = 1, \dots, nf; k = 1, \dots, nd \\
 t_{ik} &\leq \text{Max}_{dia} & \forall i = 1, \dots, nf; k = 1, \dots, nd \\
 z_i &= \sum_{k=1}^{nd} t_{ik} & \forall i = 1, \dots, nf \\
 d^* + \delta &\geq z_i - z_j & \forall i, j = 1, \dots, nf \text{ com } i \neq j \\
 y_{ij} &\in \{0,1\} & \forall i, j \\
 t_{ik} &\in Z_+ & \forall i, k \\
 z_i &\in Z_+ & \forall i \\
 d &\in Z_+
 \end{aligned}$$

6.5 SOLUÇÃO DO MODELO

Após a formulação do modelo matemático para o problema, foi realizado o processo de otimização com o auxílio de uma ferramenta computacional. Para essa finalidade, utilizou-se a linguagem de programação Python, por meio da biblioteca Pyomo.

Na aplicação do Modelo 1 de alocação de tarefas, obteve-se a seguinte solução:

- A diferença máxima de minutos trabalhados no mês entre dois funcionários quaisquer são de 30 minutos.
- A figura 2, gráfico de distribuição das tarefas, representa a distribuição das tarefas entre os funcionários ao longo dos dias de forma visualmente clara. A atribuição das tarefas é representada por diferentes cores, permitindo uma identificação visual imediata das responsabilidades de cada funcionário.
- As tarefas na tabela 4 foram atribuídas levando em consideração a minimização dessa diferença.

Tabela 4 – Resultado do modelo 1

Funcionário	Tarefa
1	1
1	2
1	5
1	8
1	11
1	15
2	3
2	7
2	16
3	6
3	10
3	12
3	17
4	4
4	9
4	13
4	14

Fonte: Autores 2023

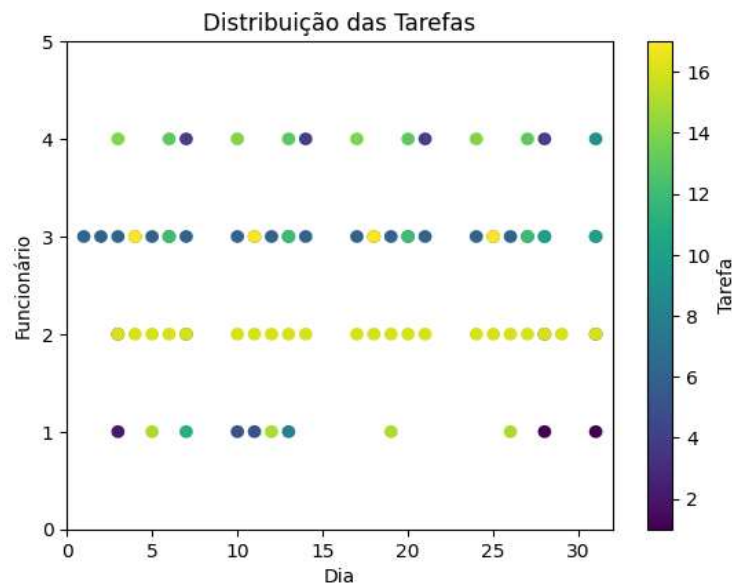


Figura 2: Gráfico de distribuição das Tarefas
Fonte: Autores (2023)

Ao analisar o gráfico, pode-se observar que há variações na alocação das tarefas para cada funcionário. Também é possível observar a distribuição das tarefas ao longo dos dias, o que indica diferentes níveis de carga de trabalho em períodos específicos. Alguns funcionários possuem uma concentração maior de tarefas em determinados dias, enquanto outros têm uma distribuição mais equilibrada ao longo do período.

Essa visualização abrangente das tarefas, proporciona uma visão geral da distribuição das atividades, e permite identificar possíveis padrões ou estratégias na atribuição das tarefas.

Após a obtenção da solução do Modelo 1, foi proposto o Modelo 2 com o objetivo de realocar os funcionários nas tarefas, considerando a maximização da pontuação total da atribuição. Além disso, foi adicionada a restrição de que a maior diferença em minutos trabalhados no mês, entre dois funcionários quaisquer, seja igual a $d^* + \delta$, onde d^* é o valor ótimo obtido no Modelo 1 e $\delta \geq 0$.

O Modelo 2, busca uma nova alocação das tarefas, visando maximizar a pontuação total da atribuição. A pontuação é determinada pelas habilidades e competências dos funcionários em cada tarefa. Dessa forma, o objetivo é atribuir as tarefas aos funcionários mais qualificados para executá-las, garantindo a eficiência e qualidade do trabalho realizado.

Além disso, a restrição adicionada no Modelo 2, relaciona-se à diferença máxima em minutos trabalhados no mês entre dois funcionários. Essa restrição, $d^* + \delta$, admite uma certa flexibilidade na distribuição das horas trabalhadas, permitindo que a diferença possa ser um pouco maior ou menor do que o valor ótimo encontrado no Modelo 1, dependendo do valor de δ . Isso permite considerar diferentes cenários, e ajustar a distribuição de horas de acordo com as necessidades e prioridades da equipe.

Com a aplicação do Modelo 2, será possível obter uma nova alocação das tarefas, considerando a maximização da pontuação e a restrição da diferença máxima de minutos trabalhados. Essa abordagem visa otimizar ainda mais a distribuição de trabalho e garantir a eficiência e qualidade das atividades realizadas pelos funcionários.

Após a aplicação do Modelo 2 de alocação de tarefas, obteve-se a seguinte solução:

- A maximização da pontuação com o valor de $\delta = 180$, resultou em uma pontuação de 764. A variação dos valores de δ , podem ser observados na figura 4, que apresenta o gráfico correspondente.
- A figura 3, que representa o gráfico de distribuição das tarefas, proporciona uma visualização clara da distribuição das tarefas entre os funcionários ao longo dos dias. As diferentes cores utilizadas no gráfico permitem identificar facilmente as responsabilidades atribuídas a cada funcionário.
- As tarefas na tabela 5 foram atribuídas levando em consideração a maximização da pontuação, com $\delta = 180$.

Tabela 5 – Resultado do modelo 1

Funcionário	Tarefa
1	2
1	4
1	5
1	9
1	12
2	10
2	13
2	16
3	1
3	7
3	14
3	17
4	3
4	6
4	8
4	11
4	15

Fonte: Autores (2023)

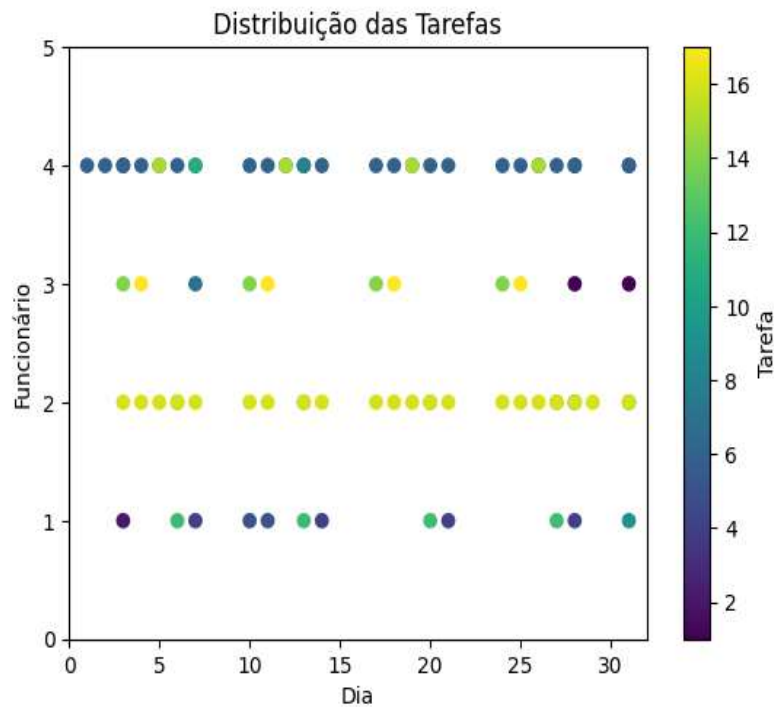


Figura 3: Gráfico de distribuição das Tarefas, modelo 2.

Fonte: Autores (2023)

Ao observar o gráfico, pode-se identificar padrões e tendências na distribuição das tarefas. Por exemplo, é possível notar que algumas tarefas são atribuídas a múltiplos funcionários em diferentes dias, indicando uma distribuição mais equilibrada das responsabilidades. Por outro lado, existem tarefas que são atribuídas a um único funcionário durante todo o período considerado, sugerindo uma maior especialização ou confiança nesse funcionário para executar essas tarefas específicas. É importante ressaltar, que não foram alocadas tarefas em fins de semana aos funcionários.

Além disso, a análise dos valores de delta, conforme ilustrado na figura 4, contribui para uma compreensão mais aprofundada dos resultados.

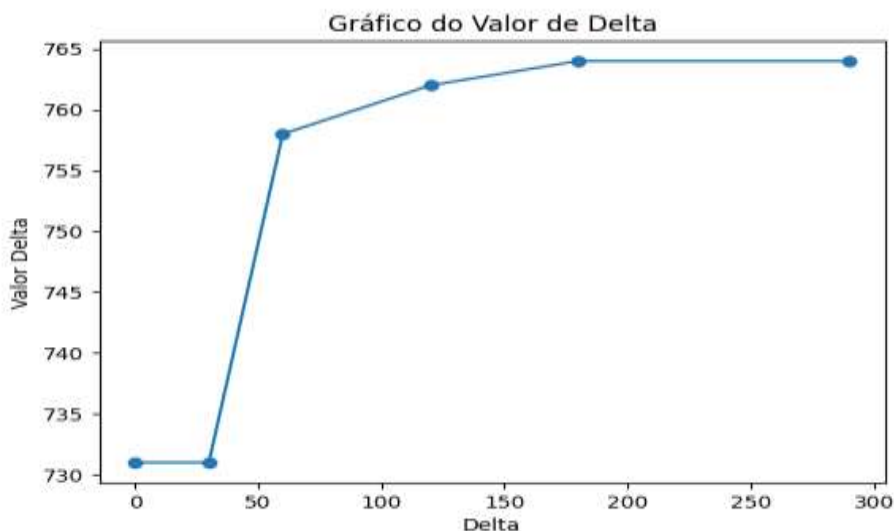


Figura 4: Valores de delta

Fonte: Autores (2023)

Durante o processo de otimização, a maximização da pontuação foi inicialmente obtida com um valor de δ igual a 0, resultando em uma função objetivo de 731. Em seguida, foram realizadas novas iterações com diferentes valores de δ para avaliar seu impacto na função objetivo.

Ao aumentar o valor de δ para 60, observou-se um aumento na função objetivo, que atingiu o valor de 758. Isso indica que a distribuição das tarefas foi ajustada de forma a maximizar a pontuação, considerando a restrição da diferença máxima de minutos trabalhados no mês, entre dois funcionários quaisquer.

No entanto, ao aumentar o valor de δ para 180, a função objetivo retornou o mesmo valor de 764. Ao aumentar para 290, não houve alteração na função objetivo, que permaneceu constante em 764. Isso indica que a distribuição das tarefas atingiu um ponto ótimo, onde não é possível obter um aumento adicional na pontuação, considerando apenas as restrições estabelecidas.

Essas informações foram representadas graficamente na figura, fornecendo uma visualização clara das mudanças na função objetivo em relação aos diferentes valores de δ . A estabilidade da função objetivo após um certo ponto, indica que a alocação de tarefas alcançou um equilíbrio satisfatório em termos de maximização da pontuação e controle da diferença máxima entre os funcionários.

7. CONCLUSÃO

Com base na análise realizada, pode-se concluir que o objetivo do artigo foi alcançado com sucesso. Foi possível desenvolver um modelo matemático e aplicar técnicas de otimização para a alocação de tarefas entre os funcionários, visando maximizar a pontuação e controlar a diferença máxima de minutos trabalhados.

Durante o estudo, identificou-se que o ponto ótimo para esse problema específico foi $\delta = 180$, o qual equilibrou efetivamente a maximização da pontuação e o controle da diferença máxima de minutos trabalhados. Essa descoberta revela a importância de considerar não apenas a pontuação, mas também o equilíbrio entre os funcionários, para garantir uma alocação eficiente e justa das tarefas.

As técnicas de visualização utilizadas, como o gráfico de dispersão e o gráfico de linha, forneceram uma compreensão clara e intuitiva dos resultados obtidos. Essas visualizações permitiram identificar padrões e tendências na distribuição das tarefas, evidenciando a combinação de especialização e equidade na atribuição das responsabilidades.

Além disso, é importante ressaltar que as conclusões obtidas são específicas para o contexto do problema analisado. Outros cenários ou configurações podem levar a soluções ótimas diferentes, portanto, é necessário adaptar o modelo às características e restrições de cada aplicação.

No âmbito da logística e da cadeia de suprimentos, a alocação eficiente de tarefas é essencial para garantir o bom funcionamento das operações. Através desse estudo, pode-se obter insights valiosos para otimizar a atribuição de tarefas em armazéns, centros de distribuição e demais áreas logísticas, melhorando a produtividade e reduzindo os tempos de execução.

8. REFERÊNCIAS

CINELLI, M.; KADZIŃSKI, M.; GONZALEZ, M.; SŁOWIŃSKI R. How to support the application of multiple criteria decision analysis? Let us start with a comprehensive taxonomy. Omega, v. 96, 102261, 2020.

Council of Supply Chain Management Professionals (CSCMP). Disponível em: <<http://cscmp.org/>> Acesso em: 09 de julho de 2023.



GALLET-DELPORT, C.; FAUCONNIER, H. The Assignment Problem. ICDCN'18, 2018.

GOPALAKRISHNAN, S.; BORRAJO, D. Assignment and Prioritization of Tasks with uncertain Durations for Satisfying Makespans in Decentralized Execution. Proceedings of the Thirty-Second International Conference on Automated Planning and Scheduling, v. 32, 2022

GOMES, C. F. S.; RIBEIRO, P. C. C. Gestão da Cadeia de Suprimentos Integrada à Tecnologia da informação. 2. ed. Rio de Janeiro: Editora SENAC Rio de Janeiro, 2013.

HILLIER, F. S.; LIEBERMAN, G. J. Introdução à Pesquisa Operacional. 9. ed. São Paulo: Mcgraw Hill, 2013.

JAIN, E.; DAHIYA, K.; SHARMA, A.; VERMA, V. Task Preference-based Bottleneck assignment problem. Computational and Applied Mathematics, 41:298, 2022.

KAKIMURA, N.; KAMIYAMA, N.; KOBAYASHI, Y. Discrete Optimization Submodular reassignment problem for reallocating agents to tasks with synergy effects. Discrete Optimization, v. 44, p. 100631, 2022.

ALSAAD, D. K. I; GHANBARI, R.; SOHRABI, A. A. & MOGHADAM, K. G. A New Model for Reassignment of Tasks to Available Employees in Iraq ' s Firms. v. 2020, 2020.

NETWORKS, W. I.; REN, H. Novel Tasks Assignment Methods for. IEEE Internet of Things Journal, v. 9, n. 13, p. 10563–10575, 2022.

ROSS, G.; SOLAND, R. (1974). A Branch and Bound Algorithm for the Generalized Assignment Problem. Mathematical Programming, 8, page 91-103.

SANTOS, M.; LIMA, I. C.; CARVALHO, F. B.; REIS, M. F.; JUNIOR, P. R. S. Uso da Programação Linear Inteira no Apoio à Decisão e a Otimização do Mix de Produção. Anais do XXXVII Encontro Nacional de Engenharia de Produção. Joinville/SC, 2017.

SCOTT, C.; LUNDGREN, H.; THOMPSON, P. Guide to Suplly Chain Management. Berlim: Springer Berlin Heidelberg, 2011.

SEDA, M. The Assignment Problem and its Relation to Logistics Problems. Algorithms 2022, 15, 377.

TAHA, H.A. Pesquisa Operacional: Uma visão geral. 8. Ed. São Paulo: Pearsonn Prentice Hall, 2008.