MSc Alexandre Estácio Féo
Associação Educacional Dom Bosco - Faculdade de Engenharia de Resende
Caixa Postal: 81.698/81711 - CEP: 27511-971 - Resende - RJ – Brasil
Professor e Doutorando de Engenharia
aefeo1@yahoo.com.br

Resumo:

Será apresentado neste trabalho o Método de Jacobi, muito utilizado para encontrar os autovalores de uma matriz real e simétrica. Através deste, visa-se entender melhor o desenvolvimento teórico do Método de Jacobi, a fim de construir um programa específico para implementação do mesmo, através do Matlab. Muitos dos métodos para resolução do autoproblema, para uma matriz A de forma geral, dependem da aplicação de uma série de transformações similares, que convertem A em uma matriz de forma especial. Vale ressaltar que, neste método, utilizam-se as transformações unitárias elementares.

Palavras-Chave: Autovalores, Matriz, Método de Jacobi.

INTRODUÇÃO

Através deste trabalho, visamos entender melhor o desenvolvimento teórico do *Método de Jacobi*, a fim de construir um programa específico para implementação do mesmo, através do Matlab. Muitos dos métodos para resolução do autoproblema, para uma matriz A de forma geral, dependem da aplicação de uma série de transformações similares que convertem A em uma matriz de forma especial. Neste método, usaremos as transformações unitárias elementares, conforme Lima Jr. (2005).

OBJETIVO

- Abordagem teórica sobre a determinação dos autovalores de uma matriz real e simétrica, usando o *Método de Jacobi*;
- Exemplificação do método com o auxílio de exemplo resolvido, através do uso da programação utilizando Matlab.

DESENVOLVIMENTO

No *Método de Jacobi* (1846), a matriz original é transformada para a forma diagonal por uma sucessão de rotações planas. No sentido exato, o número de rotações planas necessárias para produzir a forma diagonal é infinito. Isto será esperado desde que não possamos, em geral, resolver uma equação polinomial em um número finito de passos. Na prática, o processo é terminado quando os elementos fora da diagonal forem desprezíveis de acordo com a precisão desejada. Para uma real matriz simétrica, usamos reais rotações planas.

Segundo Wilkinson (1965), a matriz original será representada por $\mathbf{A_0}$, podemos, então, descrever o processo de Jacobi como se segue, ou seja, uma sucessão de matrizes $\mathbf{A_k}$ produzidas tal que satisfaçam Eq. (1) abaixo:

$$A_k = T_k A_{k-1} T_k^T \qquad (1)$$

Onde a matriz $\mathbf{T_k}$ é determinada pelas regras a seguir, conforme Eqs. (2) a (9). Vale ressaltar que utilizamos a anotação da equação 1, e não $T_k^T A_{k-1} T_k$, conforme a análise geral adotada em outros trabalhos anteriores.

Suponha o elemento fora da diagonal de $\mathbf{A_{k-1}}$, de módulo máximo, e que está dentro da posição (**p, q**). Então, $\mathbf{T_k}$ corresponde a uma rotação dentro do plano (**p, q**), e o ângulo **θ** da rotação é escolhido para reduzir o elemento de (**p, q**), $\mathbf{A_{k-l}}$, a zero. Sendo assim, temos, conforme Wilkinson (1965:266-267):

$$T_{pp} = T_{qq} = \cos\theta, \quad T_{pq} = -T_{qp} = sen\theta \qquad (2)$$

$$T_{ii} = 1 \quad (i \neq p,\, q), \quad T_{ij} = 0 \quad i \neq j \qquad (3)$$

Onde assumimos que aquele **p** é menor que **q**. $\mathbf{A_k}$ difere de $\mathbf{A_{k-1}}$ único em filas e colunas, e **p** e **q**, assim como todos os $\mathbf{A_k}$, são simétricos. Os valores modificados são definidos por:

$$a_{ip}^{(k)} = +a_{ip}^{(k-1)}\cos\theta + a_{iq}^{(k-1)} sen\theta = a_{pi}^{(k)}, \; (i \neq p, q) \quad (4)$$

$$a_{iq}^{(k)} = -a_{ip}^{(k-1)}\sin\theta + a_{iq}^{(k-1)}\cos\theta = a_{qi}^{(k)}, \; (i \neq p, q) \quad (5)$$

$$a_{pp}^{(k)} = a_{pp}^{(k-1)}\cos^2\theta + 2a_{pq}^{(k-1)}\cos\theta\, sen\theta + a_{qq}^{(k-1)} sen^2\theta \quad (6)$$

$$a_{qq}^{(k)} = a_{pp}^{(k-1)} sen^2\theta - 2a_{pq}^{(k-1)}\cos\theta\, sen\theta + a_{qq}^{(k-1)}\cos^2\theta \quad (7)$$

$$a_{pq}^{(k)} = (a_{qq}^{(k-1)} - a_{pp}^{(k-1)})\cos\theta\, sen\theta + a_{pq}^{(k-1)}(\cos^2\theta - sen^2\theta) \quad (8)$$

$$a_{qp}^{(k)} = (a_{qq}^{(k-1)} - a_{pp}^{(k-1)})\cos\theta\, sen\theta + a_{pq}^{(k-1)}(\cos^2\theta - sen^2\theta) \quad (9)$$

Então, desde que $a_{pq}^{(k)}$ seja zero, teremos:

$$\tan 2\theta = 2a_{pq}^{(k-1)} / (a_{pp}^{(k-1)} - a_{qq}^{(k-1)}), \qquad (10)$$

Vale ressaltar que sempre levaremos θ a assumir valores na faixa de:

$$|\,\theta\,| \leq 0.25\,\pi \qquad (11)$$

E, se $a_{pp}^{(k-1)} = a_{qq}^{(k-1)}$, então o ângulo θ assumirá o seguinte valor:

$$\theta = \pm\frac{1}{4}\pi$$

De acordo com o sinal de $a_{pq}^{(k-1)}$.

A neste caso, ao contrário, a diagonalização estará completa. Ainda para Wilkinson (1965), se cada ângulo **θ** é definido pela equação 11, então:

$$A_k \to diag\left(\lambda_i\right) \; conforme \;\; k \to \infty \qquad (12)$$

Onde $\boldsymbol{\lambda_i}$ são os autovalores de $\mathbf{A_0}$, e, conseqüentemente, de todos $\mathbf{A_k}$. Escrevemos:

$$A_k = diag\left(a_{ii}^{(k)}\right) + E_k \qquad (13)$$

Onde $\mathbf{E_k}$ é a matriz simétrica dos elementos fora da diagonal. Para Wilkinson (1965), pode se dizer que:

$$\left\|E_k\right\|_E \to 0 \quad conforme \;\; diag \quad k \to \infty. \qquad (14)$$

Das Eqs. (4) e (5), temos:

$$\sum_{i \neq p,q} \left[\left(a_{ip}^{(k)}\right)^2 + \left(a_{iq}^{(k)}\right)^2\right] = \sum_{i \neq p,q} \left[\left(a_{ip}^{(k-1)}\right)^2 + \left(a_{iq}^{(k-1)}\right)^2\right], \qquad (15)$$

Isso uma vez que a soma dos quadrados dos elementos fora da diagonal, excluindo os elementos **(p, q)** e **(q, p)** permaneçam constantes. Portanto, estes dois últimos elementos tornam-se zero, e tem-se:

$$\left\|E_k\right\|_E^2 = \left\|E_{k-1}\right\|_E^2 - 2\left(a_{pq}^{(k-1)}\right)^2, \qquad (16)$$

Desde que $a_{pq}^{(k-1)}$ seja o elemento de E_{k-1} de módulo máximo, então:

$$\left\|E_k\right\|_E^2 \leq \left[1-2/\left(n^2-n\right)\right]\left\|E_{k-1}\right\|_E^2 \leq \left[1-2/\left(n^2-n\right)\right]^k \left\|E_0\right\|_E^2. \qquad (17)$$

A desigualdade da equação 17 fornece a equação para a razão de convergência, fazendo:

$$N = 1/2\left(n^2 - n\right) \qquad (18)$$

Então:

$$\left\|E_{rN}\right\|_E^2 \leq \left[1-1/N\right]^{rN} \left\|E_0\right\|_E^2 < e^{-r}\left\|E_0\right\|_E^2. \qquad (19)$$

Certamente, pode-se dizer que:

$$\left\|E_{rN}\right\|_E^2 < e^2\left\|E_0\right\|^2, \; quando \;\; r > 2\ln(1/e), \qquad (20)$$

Ak tende a uma matriz diagonal fixa. Assim, continuamos a iteração até, finalmente:

$$\left\|E_k\right\|_E < \varepsilon. \qquad (21)$$

Nota-se, desta forma, que o processo é essencialmente iterativo, como um elemento que é reduzido a zero, através de uma rotação. Em geral, é feito não zero através de rotações subseqüentes.

EXEMPLO RESOLVIDO

Seja $A = \begin{bmatrix} 0.6532 & 0.2165 & 0.0031 \\ 0.2165 & 0.4105 & 0.0052 \\ 0.0031 & 0.0052 & 0.2132 \end{bmatrix}$ e $\varepsilon < 1\text{e-}8$

Por ser uma matriz 3x3 é fácil, algebricamente, encontrarmos os autovalores. Resolvendo o sistema algebricamente encontraremos (Wilkinson, 1965:274):

$$\lambda_1 = 0.2131$$
$$\lambda_2 = 0.2837$$
$$\lambda_3 = 0.7801$$

Vamos verificar agora, através do Método de Jacobi, com o uso do programa elaborado (Lima Jr., 2005), se os resultados convergirão para os valores encontrados algebricamente. A matriz $T_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ corresponde à rotação no plano (p, q), e o ângulo θ ao de rotação. Após a primeira interação, teremos, conforme Eqs. (2), (3) e (10):

$$\theta = 0.53\,[\,rad\,]$$

e

$$T_{pp} = T_{qq} = \cos\theta = 0.8628, \quad T_{pq} = -\,T_{qp} = sen\,\theta = 0.5055$$

$$T_{ii} = 1 \quad (i \neq p,\, q), \quad T_{ij} = 0 \quad i \neq j$$

Resultando num plano de rotação T:

$$T = \begin{bmatrix} 0.8628 & -0.5055 & 0.0000 \\ 0.5055 & 0.8628 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

Então, fazendo o teste de convergência:

$$0.1626 > \varepsilon = 0.00000001$$

Desta forma, teremos, após a primeira interação, a matriz A como:

$$A = \begin{bmatrix} 0.7800 & 0.0000 & 0.0053 \\ 0.0000 & 0.2837 & 0.0029 \\ 0.0053 & 0.0029 & 0.2132 \end{bmatrix}$$

Teremos, após a 2ª interação, os seguintes dados:

$$\theta = 0.0094\,[\,rad\,] \quad T = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0000 & -0.0094 \\ 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 \\ 0.0094 & 0.0000 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0.7801 & 0.0000 & -0.0000 \\ 0.0000 & 0.2837 & 0.0029 \\ 0.0000 & 0.0029 & 0.2132 \end{bmatrix} \quad convergência = 0.0000636 > 0.00000001$$

Após a 5ª interação, teremos, finalmente:

$$\theta = 8.766e{-}010\,[rad] \quad T = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0000 & -0.0000 \\ 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0.7801 & 0.0000 & -0.0000 \\ 0.0000 & 0.2838 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0029 & 0.2130 \end{bmatrix} \quad convergência = 4.4212e{-}050 > 0.00000001$$

Sendo assim, podemos dizer que os autovalores encontrados são os elementos da diagonal da matriz A acima mostrada. Isto é:

$$\lambda = \begin{bmatrix} 0.7801 \\ 0.2838 \\ 0.2130 \end{bmatrix}$$

Portanto, os autovalores da matriz A são:

$$\lambda_1 = 0.21303,\ \lambda_2 = 0.28378 \text{ e } \lambda_3 = 0.78009$$

Que, após cinco interações, resultará na eficiência de convergência do método em questão, pois vemos que os valores realmente se aproximam, cada vez mais, dos valores encontrados algebricamente.

CONCLUSÃO

Concluiu-se que a determinação dos autovalores de uma matriz real e simétrica, usando o *Método de Jacobi,* é de fácil compreensão e simples implementação computacional.

BIBLIOGRAFIA

LIMA Jr., J. J., 2005. Notas de Aula. *Métodos Matemáticos para Sistemas Mecânicos*. PPG-IEM, UNIFEI.

WILKINSON, J. H., 1965 – *The Algebraic Eigenvalue Problem*, Clarendon Press, Oxford, London: 662p.