Alexandre Estácio Féo
Associação Educacional Dom Bosco - Faculdade de Engenharia de Resende
Caixa Postal: 81.698/81711 - CEP: 27511-971 - Resende - RJ – Brasil
Professor e Doutorando de Engenharia
aefeo@unifei.edu.br

Resumo:

Neste trabalho apresenta-se o método chamado de Decomposição de Doolittle para a resolução de sistemas lineares, assim como um exemplo resolvido para a melhor visualização do método, o qual simplifica uma matriz [A] em duas outras matrizes triangulares [L] e [U]. A proposta aqui apresentada é de determinar um método de resolução de sistemas lineares usando a Decomposição de Doolittle, que consiste na decomposição de uma matriz [A] num produto de duas matrizes [L] (triangular inferior de diagonal unitária) e [U] (triangular superior). Ou seja: [A]=[L] [U]. Desta forma, pode-se dizer que este método consiste numa forma de simplificar a solução de [A]{x}={b} para [A] numa matriz não triangular e não simétrica, como $[A]\neq[A]^T$.

Palavras-Chave: Sistemas Lineares, Doolittle, LU.

INTRODUÇÃO

A proposta aqui apresentada é de determinar um método de resolução de sistemas lineares usando a *Decomposição de Doolittle*, que consiste na decomposição de uma matriz [A] num produto de duas matrizes [L] (triangular inferior de diagonal unitária) e [U] (triangular superior). Ou seja:

$$[A]=[L][U] \qquad (1)$$

Desta forma, podemos dizer que este método consiste numa forma de simplificar a solução de [A]{x}={b} para [A] numa matriz não triangular e não simétrica, como $[A]\neq[A]^T$.

OBJETIVOS

- Aprofundamento na teoria ministrada em sala de aula referente ao conceito e ao método de *Decomposição de Doolittle*;
- Elaboração de um exemplo resolvido para a melhor visualização do método estudado.

DESENVOLVIMENTO

Um sistema linear n x n pode ser escrito em forma matricial, como [A]{x}={b}, onde:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad (2)$$

Ocorre, então, que a fatoração de [A] produz um produto de duas matrizes mais simples, sendo elas: (2)

- Uma matriz triangular inferior de diagonal unitária:

$$L=\begin{bmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ l_{21} & 1 & \dots & 0\\ : & : & \dots & :\\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1\end{bmatrix} \qquad (3)$$

- E uma matriz triangular superior:

$$U=\begin{bmatrix}u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n}\\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n}\\ 0 & 0 & \dots & :\\ 0 & 0 & \dots & u_{nn}\end{bmatrix} \qquad (4)$$

Notamos, desta forma, que o método proposto produz a decomposição de [A] em [L] [U], onde:

Sendo assim, podemos reescrever o sistema [A]{x}={b} da seguinte forma:

$$[A]\{x\}=([L][U])\{x\}=[L]([U]\{x\})=\{b\} \qquad (5)$$

Então, fazendo-se [U]{x}={y}, podemos resolver o sistema [A]{x}={b} da seguinte forma: primeiramente, resolvemos o sistema triangular inferior [L]{y}={b}, obtendo y como solução e, em seguida, já com a solução y obtida, resolvemos o sistema triangular superior [U]{x}={y}, obtendo x como solução.

Ou seja, decompomos a resolução de um sistema linear na resolução de dois sistemas triangulares, sendo primeiro o triangular inferior, o qual resolvemos através de substituições progressivas, e o segundo, o triangular superior, através de substituições retroativas.

Podemos dizer, então, que o método de Dootittle, ou método de Decomposição de LU, consiste basicamente de:

i) Obter a fatoração LU da matriz [A];
ii) Resolver [U]{x}={y};
iii) Resolver o sistema triangular inferior [L]{y}={b};
iv) Após obter a resolução y do sistema [L]{y}={b}, resolver o sistema triangular superior [U]{x}={y}.

Desta forma, para decompor a matriz [A] em [L] [U], utilizaremos, então, um sistema com n = três, onde:

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ l_{21} & 1 & 0\\ l_{31} & l_{32} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{11} & u_{12} & u_{13}\\ 0 & u_{22} & u_{23}\\ 0 & 0 & u_{33}\end{bmatrix} \qquad (6)$$

Agora, utilizando o sistema demonstrado anteriormente para obter as linhas de matriz [U], e as colunas da matriz [L] pelas 3 colunas de [U] e igualando a_{11}, a_{12} e a_{13}, onde:

$$u_{11}=a_{11},\ u_{12}=a_{12},\ u_{13}=a_{13} \qquad (7)$$

Então, igualamos a_{21} e a_{31}, e calculamos a 1ª coluna de [L] da seguinte forma:

$$l_{i1}=\frac{a_{ij}-\sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}u_{kj}}{u_{jj}} \qquad \forall\ i=j,\dots,n \quad ; \quad j>=2 \qquad (8)$$

Escrevendo, agora,

$$u_{22} = a_{22} - l_{21} u_{12} \quad , \quad u_{23} = a_{23} - l_{21} u_{13} \qquad (9)$$

E determinando u_{22} e u_{23}, o qual é a 2ª linha de [U]. Logo após, calculamos m_{32} da seguinte forma:

$$l_{i1} = \frac{a_{i1}}{u_{11}} \qquad \forall i = 2, ..., n \qquad (10)$$

E, finalmente, o cálculo de u_{33}:

$$u_{33} = a_{33} - l_{31} u_{13} - l_{32} u_{23} \qquad (11)$$

A obtenção dos fatores L=[l_{ij}] (com diagonal principal unitária) e U=[u_{ij}]. No método de Doolittle, vale ressaltar que também podem ser obtidos tais fatores da utilizando-se as fórmulas abaixo:

- Para a matriz [U]:

$$u_{1j} = a_{1j} \qquad \forall\ j = i, ..., n \qquad (12)$$

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} u_{kj} \qquad \forall\ j = i, ..., n \ ; \ i >= 2 \ (13)$$

- E para a matriz [L]:

$$l_{i1} = \frac{a_{i1}}{u_{11}} \qquad \forall i = 2, ..., n \qquad (14)$$

$$l_{i1} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk} u_{kj}}{u_{jj}} \qquad \forall\ i = j, ..., n \ ; \ j >= 2 \ (15)$$

EXEMPLO RESOLVIDO

Considere o sistema linear abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad (16)$$

Agora decomponha a matriz [A] em [L] e [U] pelo método de *Decomposição de Doolittle.*

1ª linha: u_{11}=4, u_{12}=2, u_{13}=1 (17)
1ª coluna: $m_{21}=a_{21}/u_{11}=1/4$, (18)
$m_{31}=a_{31}=a_{31}/u_{11}=1/2$ (19)

$$2^a \text{ linha: } u_{22}=a_{22}-m_{21}u_{12}=3/2 \quad (20)$$

$$u_{23}=a_{21}-m_{21}u_{13}=15/4 \quad (21)$$

$$2^a \text{ coluna: } (m_{32}=a_{32}-m_{31}u_{12})/u_{22}=2 \quad (22)$$

$$3^a \text{ linha: } u_{33}=a_{33}-m_{31}u_{13}-m_{32}u_{23}=-7 \quad (23)$$

$$L=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } U=\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{15}{4} \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} \quad (24)$$

CONCLUSÕES

Este trabalho possibilitou a solução de um sistema linear de matriz do tipo não simétrica e não triangular, através do método de *Decomposição de Doolittle*. Finalmente, podemos dizer que esta é, então, uma ferramenta de alta aplicabilidade.

BIBLIOGRAFIA

FRIEDMAN, M./KANDELA, A. (1993), *Fundamentals of computer numerical analysis*, CRC Press, Florida, 1. ed., 587 p.

LIMA Jr, J.J. (2005), Notas de aulas, Métodos Matemáticos para Sistemas Mecânicos, MPF01/MCC03, UNIFEI.

LOURENÇO, V.L. Departamento de engenharia química, Faculdade de ciências e tecnologia, Universidade de Coimbra, http://www.eq.uc.pt/~bufig3/tarefa1.htm.

RUGGIERO, M.A.G. e LOPES, V.L.R (1996), Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais, 2.ed., MAKRON Books, São Paulo.

SADOSKY, M. (1980), Cálculo numérico e gráfico, 8. ed., INTERCIÊNCIA, Rio de Janeiro.

SOUZA, M.J.F, Departamento de computação, UFOP, http://www.decom.ufop.br/prof/marcone.