MSc Alexandre Estácio Féo
Associação Educacional Dom Bosco - Faculdade de Engenharia de Resende
Caixa Postal: 81.698/81711 - CEP: 27511-971 - Resende - RJ – Brasil
Professor e Doutorando de Engenharia
aefeo@unifei.edu.br

Resumo:

Neste trabalho apresentamos o método chamado de Eliminação de Gauss para a resolução de sistemas lineares. Esse método é utilizado na obtenção dos valores do vetor {x}, na determinação da singularidade da matriz do sistema e, finalmente, na elaboração de estratégia de pivotamento, utilizada para minimizar o erro relativo de determinadas situações. Também um exemplo resolvido para a melhor visualização do método será apresentado ao final do trabalho. O algoritmo de eliminação de Gauss é o método mais usado para resolver sistemas de equações lineares. Trata-se de um sistema com uma seqüência de passos elementares, que transformam o sistema inicial, Ax=b, num outro, Ux=c, em que a sua resolução é mais fácil; no entanto, ambos são equivalentes, pois têm o mesmo conjunto de soluções. Esses passos elementares traduzem-se através de: Troca da ordem das equações; Multiplicação de ambos os membros de qualquer das equações por um elemento real não nulo; e substituição de uma das equações pela sua soma com outra equação do sistema. Vale ressaltar que um programa foi desenvolvido em MatLab, para solucionar os sistemas de equações propostos.

Palavras-Chave: Eliminação de Gauss, Sistemas Lineares, Matlab.

INTRODUÇÃO

Segundo Souza (2002), o algoritmo de eliminação de Gauss é o método mais usado para resolver sistemas de equações lineares.

Trata-se de um sistema com uma seqüência de passos elementares, que transformam o sistema inicial, Ax=b, num outro, Ux=c, em que a sua resolução é mais fácil; no entanto, ambos são equivalentes, pois têm o mesmo conjunto de soluções. Esses passos elementares traduzem-se através de:

i) Troca da ordem das equações;
ii) Multiplicação de ambos os membros de qualquer das equações por um elemento real não nulo;
iii) Substituição de uma das equações pela sua soma com outra equação do sistema.

Vale ressaltar que um programa foi desenvolvido em MatLab para solucionar os sistemas de equações propostos.

OBJETIVOS

- Desenvolver programação em MatLab;
- Aprender um novo método para resolução de Sistemas lineares;
- Elaboração de um programa com método direto de *Eliminação de Gauss* que resolva os sistemas propostos.

DESENVOLVIMENTO

Consideremos o sistema Ax=b, em que A é uma matriz quadrada n x n.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \qquad \textbf{(1)}$$

Sendo assim, podemos dizer que o objetivo principal do método proposto consiste em eliminar os elementos a_{ij}, i>j, de forma a obter um sistema equivalente com uma matriz triangular superior. Tendo uma matriz triangular, basta aplicar substituições sucessivas para chegarmos à solução pretendida.

Então, o método consiste em $n-1$ passos, onde construímos elementos $a_{ij}^{(k+1)}$ a partir dos elementos $a_{ij}^{(k)}$, considerando $a_{ij}^{(1)}$ como a matriz inicial.

Passo *k*

Se o pivot é $a_{kk}^{(k)} = 0$, então, tem que se efetuar a *troca de linhas*.

Mas se $a_{kk}^{(k)} \neq 0$, então:

Eliminação

Para k = 1 , ... , n-1

Para $i = k + 1, \ldots, n$

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$$

$$a_{ik}^{(k)} = 0$$

Para $i, j = k + 1, \ldots, n$

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ik}^{(k)} - m_{ik} a_{ik}^{(k)}$$

Para $i = k + 1, \ldots, n$

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - m_{ik} b_k^{(k)}$$

Desta forma, ao final dos $n-1$ passos, obteremos o sistema triangular superior equivalente:

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & \cdots & \cdots & a_{1n}^{1} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(n)} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2)}$$

O qual poderemos resolver, facilmente, por substituição ascendente:

$$
\left[\begin{array}{l}
x_n = \dfrac{b_n^{(n)}}{a_{nn}^{n}} \\
\left[\begin{array}{l}
Para\ \ k = n-1, \dots, 1 \\
\qquad Para\ \ j = k+1, \dots, n \\
\qquad x_k = \dfrac{\left(b_k^{(k)} - \sum a_{kj}^{(k)} x_j \right)}{a_{kk}^{(k)}}
\end{array}\right.
\end{array}\right.
$$

Armazenando os coeficientes m_{ik}, podemos obter uma fatorização da matriz A na seguinte forma:

$$
A = LU = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{21} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ m_{n1} & \cdots & m_{n\,n-1} & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix}}_{U} \quad (3)
$$

Isto para caso não sejam efetuadas trocas de linhas.

Caso existam trocas de linhas, a fatorização é da forma *PA=LU*, na qual *P* é uma matriz de permutação. Ao resolver o sistema, obteremos:

$$LUx = Pb \qquad \textbf{(4)}$$

Teorema

Será a fatorização *A=LU*, na qual *L* é uma *matriz triangular inferior com diagonal principal unitária,* e *U* é uma *matriz triangular superior*, obtida de forma única, se os pivots verificarem $a_{kk}^{(k)} \neq 0$.

Número de Operações

Analisemos, agora, qual o número de operações (+- ou */) envolvido na resolução de um sistema.

Fatorização da matriz

Em cada Passo *k:*

- Cálculo dos m_{ik}

$n-k$ divisões --- correspondentes a um total de $\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)$ operações.

- Cálculo dos a_{ij}

$(n-k)^2$ divisões --- correspondentes a um total de $\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)^2$ operações.

Cálculo de $b^{(x)}$

Em cada Passo *k*:

$n-k$ multiplicações e subtrações correspondentes a um total de $\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)$ operações.

Substituição

No total, teremos:

$n+\sum_{k=1}^{n-1} k = n(n+1)/2$ multiplicações e divisões $\sum_{k=1}^{n-1} k = n(n-1)/2$ subtrações.

Como $\sum_{k=1}^{n-1}(n-k) = n(n-1)/2$ e também $\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)^2 = n(n-1)(2n-1)/6$.

Desta forma, obteremos a Tabela 1:

Tabela 1–Análise da Complexidade dos Algoritmos

Etapas	Somas e Subtrações	Multiplicações e Divisões
Fatorização	$n(n-1)(2n-1)/6$	$n(n^2-1)/3$
Cálculo $b^{(n)}$	$n(n-1)/2$	$n(n-1)/2$
Substituição	$n(n+1)/2$	$n(n-1)/2$
TOTAL	$\sim n^3/3$	$\sim n^3/3$

Desta forma, podemos dizer que é fácil verificarmos a sucessão do número total de operações, ao considerarmos uma dimensão da matriz elevada, que é, assintoticamente, equivalente a $2n^3/3$.

Normalmente, como o tempo de cálculo é muito superior numa multiplicação ou divisão, consideramos apenas que, assintoticamente, o método de eliminação de Gauss envolverá $n^3/3$ operações (*,/).

Este valor é bastante reduzido se comparado com o número de operações que seria necessário efetuar se resolvêssemos o sistema pela Regra de Cramer (nesse caso, teríamos ~ $(n+1)!$ operações, o que, por exemplo, para $n=10$ corresponderia efetuar ~ 40.000.000 de operações (*,/) ao invés de ~ 430 pelo método de *Eliminação de Gauss*).

Pesquisa de pivot

Tal como quando o pivot é nulo (isto é, $a_{kk}^{(k)} = 0$), devemos efetuar uma troca de linhas, se o seu valor for próximo de zero. Caso não seja efetuada a troca de linhas ou colunas, os erros de arredondamento (surgidos na fatorização da matriz) podem provocar grandes erros nos resultados.

De forma equivalente, devemos efetuar a troca de linhas ou colunas quando houver um grande desequilíbrio de grandezas nos elementos da matriz e caso o pivot for pequeno face aos restantes elementos (porque, dividindo, será equivalente a que ele seja próximo de zero).

Para contornar este problema de estabilidade numérica, usamos as seguintes estratégias a seguir.

Pesquisa parcial de pivot

Ocorre normalmente por linhas. Em cada passo k da eliminação de Gauss, trocamos a linha k com a linha r, onde r é tal que:

$$\left|a_{rk}^{(k)}\right| = \max_{\{i=k,\ldots,n\}}\left|a_{ik}^{(k)}\right| \qquad (5)$$

Vale ressaltar que esta estratégia é utilizada apenas no caso de $k \neq r$.

Pesquisa total de pivot

Em cada passo k da eliminação de Gauss, troca-se a linha k com a linha r, e a coluna k com a coluna s, onde r, s são tais que:

$$\left|a_{rk}^{(k)}\right| = \max_{\{i=k,\ldots,n\}}\left|a_{ik}^{(k)}\right| \qquad \textbf{(6)}$$

Vale ressaltar que esta estratégia é utilizada apenas no caso de $k \neq r$ ou $k \neq s$.

Exemplo RESOLVIDO

Considere o sistema representado a seguir:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Para representar todas as mudanças, vamos formar uma matriz com duas partes: a 1ª será a matriz dos coeficientes e a 2ª será o vetor dos termos independentes:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & \vdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \vdots & 2 \\ 4 & 3 & -2 & \vdots & 3 \end{pmatrix}$$

Note que esta matriz se chama matriz aumentada. Todos os passos serão realizados sobre B, poupando tempo e simplificando a seguinte notação:

Passo 1

Com $m_{21} = a_{21}/a_{11} = 1/3$, zeraremos o elemento da posição (2,1), ou seja:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & \vdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \vdots & 2 \\ 4 & 3 & -2 & \vdots & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & \vdots & 1 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & \vdots & 5/3 \\ 4 & 3 & -2 & \vdots & 3 \end{pmatrix}$$

Passo 2

Com m31 = a31/a11 = 4/3, zeraremos o elemento da posição (3,1):

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & \vdots & 1 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & \vdots & 5/3 \\ 4 & 3 & -2 & \vdots & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & \vdots & 1 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & \vdots & 5/3 \\ 0 & 1/3 & -22/3 & \vdots & 5/3 \end{pmatrix}$$

Passo 3

Com m32 = a32/a22 = 1, zeraremos o elemento da posição (3,2):

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & \vdots & 1 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & \vdots & 5/3 \\ 0 & 1/3 & -22/3 & \vdots & 5/3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & \vdots & 1 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & \vdots & 5/3 \\ 0 & 0 & -8 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

Então, a matriz final será:

$$B' = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & \vdots & 1 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & \vdots & 5/3 \\ 0 & 0 & -8 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

Resultando em:

$$x_3 = 0 / -8 = 0$$

Voltando à penúltima linha B', teremos:

$$1/3x_2 + 2/3x_3 = 5/3 \text{ e como } \boxed{x_3 = 0};$$

$$(7/3)x_2 + (2/3)1 = 3\,; \qquad \boxed{x_2 = 1}.$$

Da 1ª linha, vem:

$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \text{ e } x_2 = 5, x_3 = 0$$

$$3x_1 + 10 + 0 = 1\,; \qquad \boxed{x_1 = -3}$$

A solução final é dada pelo vetor:

$$X = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

CONCLUSÕES

Neste trabalho apresentamos o algoritmo para resolução de sistemas lineares usando o método da *Eliminação de Gauss*. Deste modo, solucionamos o sistema linear proposto, através de um programa desenvolvido em MatLab. Percebemos que através deste método podemos transformar uma matriz qualquer em uma matriz triangular superior, tornando, assim, a resolução do sistema bem mais simples.

BIBLIOGRAFIA

CUNHA, M. C. C. (2003), *Métodos numéricos*, Editora Unicamp, Campinas-SP, 2° ed., 280p.

FREITAS, DANIEL, S., INE, Departamento de informática e de estatística, UFSC, http://www.inf.ufsc.br/~santana/

LIMA Jr, J.J. (2004), Notas de aulas, *Métodos Matemáticos para Sistemas Mecânicos*, MPF01/MCC03, UNIFEI

RUGGIERO, M. A. G. (1996), Cálculo Numérico: Aspectos teóricos, 2° Ed., Makron Books, São Paulo

SANTOS, V. R. B. (1974), Curso de Cálculo Numérico, 2° ed., Livros técnicos e Científicos Editora S.A., 255p.

SANTOS, V. R. B. (1977), *Curso de Cálculo Numérico*, Livros Técnicos e Científicos Editora, Rio de Janeiro-RJ, 3° ed. Reimpressão, 276p.

SOUZA, M.J.F, Departamento de computação,UFOP, http://www.decom.ufop.br/prof/marcon