MSc Alexandre Estácio Féo
Associação Educacional Dom Bosco - Faculdade de Engenharia de Resende
Caixa Postal: 81.698/81711 - CEP: 27511-971 - Resende - RJ – Brasil
Professor e Doutorando de Engenharia
aefeo@unifei.edu.br

Resumo:

Neste trabalho será apresentado o método de resolução de sistemas superdeterminados, que são caracterizados quando o número de equações é maior que o número de incógnitas (m>n), por mínimos quadrados, como simplificação do sistema superdeterminado para um sistema normal (simétrico). Através desta simplificação, aplicar-se-á em seguida, a eliminação de Gauss para determinação das variáveis do sistema. Abordar-se-á a teoria do método e demonstrar-se-á o método através de exemplo resolvido. Vale ressaltar que o método dos quadrados mínimos é provavelmente a técnica de aproximação mais usada na análise numérica, assim como em problemas práticos. Isto se deve tanto à sua simplicidade quanto ao fato de que, em geral, buscam-se aproximações para dados que são medidas obtidas experimentalmente com um certo grau de incerteza. Este método foi publicado, pela primeira vez, por Adrien-Marie Legendre (1752-1833) em 1805; mas ele já era usado por Carl Friedrich Gauss (1777-1855), em seus cálculos na Astronomia, desde 1795 (Cunha, 2003).

Palavras-Chave: Eliminação de Gauss, Sistemas Lineares e Superdeterminados, Mínimos Quadrados.

INTRODUÇÃO

O método dos quadrados mínimos é provavelmente a técnica de aproximação mais usada na análise numérica e em problemas práticos. Isto se deve tanto à sua simplicidade quanto ao fato de que, em geral, buscamos aproximações para dados que são medidas obtidas experimentalmente com um certo grau de incerteza.

Este método foi publicado, pela primeira vez, por Adrien-Marie Legendre (1752–1833) em 1805, mas ele já era usado por Carl Friedrich Gauss (1777–1855), em seus cálculos na Astronomia, desde 1795 (Cunha, 2003).

OBJETIVOS

- Abordagem teórica sobre o método dos mínimos quadrados e determinação dos coeficientes pela eliminação de Gauss;
- Exemplificação do método com o auxílio de exemplo resolvido.

DESENVOLVIMENTO

Segundo Sadosky (1965), dado um conjunto de m equações lineares a seguir:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad (01)$$

Trata-se de encontrar quais são os valores mais aceitáveis para as incógnitas x_1, $x_2,\ldots,x_n$, quando o número de incógnitas(n) é menor que o número de equações(m) sistemas superdeterminados (m>n). Mas existem diferentes critérios para eleger os valores mais aceitáveis.

No método dos quadrados mínimos, adota-se o critério de Legendre (1806), que diz que se chamarmos ε_i como erro, então:

$$\varepsilon_i = a_i . x_1 + b_i . x_2 + c_i . x_3 + \ldots + l_i . x_n - k_i \quad (02)$$

O conjunto dos valores ($x_1, x_2,...,x_n$) mais aceitáveis para adotar como solução é o que tem mínima a soma dos quadrados dos erros:

$$\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_r^2 \qquad (03)$$

De acordo com o critério de Legendre, deve ser mínima a soma:

Com {R} sendo o resíduo.

$$[A].\{x\} \neq \{b\}$$
$$[A].\{x\} - \{b\} = \{R\} \qquad (04)$$

Minimizando o resíduo através da NORMA EUCLIDIANA, vem:

$\left\|\{R\}\right\|_E^2$ que teremos de minimizar,

$$\left\|\{R\}\right\|_E^2 = \{R\}^T . \{R\} \qquad (05)$$

Considerando (5) em (4) e desenvolvendo teremos:

$$\left\|\{R\}\right\|_E^2 = \{[A].\{x\} - \{b\}\}^T . \{[A].\{x\} - \{b\}\}$$

$$\left\|\{R\}\right\|_E^2 = \{\{x\}^T . [A]^T - \{b\}^T\} . \{[A].\{x\} - \{b\}\}$$

$$\| \{R\} \|_E^2 = \{x\}^T [A]^T [A]\{x\} - \{x\}^T [A]^T \{b\} - \{b\}^T [A]\{x\} + \{b\}^T \{b\}$$

Que resulta em:

$$\| \{R\} \|_E^2 = \{x\}^T [A]^T [A]\{x\} - 2\{b\}^T [A]\{x\} + \{b\}^T \{b\} \quad (06)$$

Minimizando o resíduo:

$$\frac{\partial\{R\}^T\{R\}}{\partial\{`x\}} = 0 \qquad (07)$$

Sabemos que $\{x\}^T \{x\} = X^2$

Aplicando a (07) em (06), teremos:

$$2.\left[A\right]^{T}.\left[A\right].\left\{x\right\}-2.\left[A\right]^{T}.\left\{b\right\}+0=0 \qquad (08)$$

A solução de mínimos quadrados será:

$$\left[A\right]^{T}.\left[A\right].\left\{x\right\}=\left[A\right]^{T}.\left\{b\right\} \qquad (09)$$

EXEMPLO RESOLVIDO 1

Encontrar a solução do sistema abaixo:

$$y = a.x + b \qquad (10)$$

Para atender a tabela 1 a seguir.

Tabela 1 – Levantamento de pontos

x	y
0	1
1	3
2	5

Neste caso de três pontos, tem se que:

$$\left[A\right]=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix};$$

$$\left\{x\right\}=\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}; \qquad (11)$$

$$\left\{b\right\}=\begin{bmatrix}1\\ 3\\ 5\end{bmatrix}$$

Jogando a matriz A , os vetores x e b de (11) em (09) teremos:

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}^{T}.\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}.\begin{Bmatrix}a\\ b\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}^{T}.\begin{Bmatrix}1\\ 3\\ 5\end{Bmatrix} \qquad (12)$$

Adiante, o sistema normal é, neste caso:

$$\begin{cases}5a + 3b = 13\\ 3a + 3b = 9\end{cases} \qquad (13)$$

Aplicando a eliminação de Gauss, eliminando a da 2ª equação:

$$l_2 = l_2 - \frac{3}{5}.l_1 \qquad (14)$$

Ficando o sistema desse jeito quando (14) em (13):

$$\begin{aligned} 5a + \quad 3b &= 13 \\ 0a + 1,2b &= \ 1,2 \end{aligned} \qquad (15)$$

Resolvendo o sistema triangular superior pela substituição inversa, obtêm-se os valores do ponto mais aproximadamente comum as retas.

Teremos: b = 1 e a = 2, resultando na reta

$$y = 2x + 1$$

para a solução dos valores obtidos na tabela 1.

EXEMPLO RESOLVIDO 2

Precisa-se de uma equação descrevendo o calor específico da água (cp), na faixa de 0 a 100 0C (273,15 a 373,15 K). Os dados estão disponíveis na tabela 1.
Perry (Chemical Engineers' Handbook) sugere duas formas para a equação, onde T é a temperatura (K):

$$c_p = b_0 + b_1T + b_2T^2 \qquad (16)$$

$$c_p = b_0 + b_1T + b_2T^2 \qquad (16)$$

e, dessas equações pode-se escrever uma terceira:

$$c_p = b_0 + b_1T + b_2T^2 + b_2T^{-2} \qquad (18)$$

Tabela 1 – Dados obtidos através de Ensaios

Temperatura (K)	Calor Específico ($cal.g^{-1}K^{-1}$)
273,15	1,00803
283,15	1,00194
293,15	0,99947
303,15	0,99866
313,15	0,99869
323,15	0,99919
333,15	1,00007
343,15	1,00131
353,15	1,00294
363,15	1,00502
373,15	1,00763

Com base nos dados da tabela 1 e nas equações (16) a (18) escolha a melhor regressão, resolvendo o sistema, com solução de mínimos quadrados usando a Eliminação de Gauss.

$$[A]\{x\}=\{b\} \qquad (19)$$

A qualidade do ajuste pode ser determinada pelo parâmetro r, "coeficiente de regressão", dado pela equação (20).

$$r=\sqrt{(\{x\}^T([A]^T\{b\})-(\sum b_{estim})^2/N)/(\{b\}^T\{b\}-(\sum b_{estim})^2/N)} \qquad (20)$$

O vetor {x}={bo b1 b2} da eq.(16) é:

$$x=\begin{Bmatrix}1.3481\\ -0.0021873\\ 3.423e\text{-}006\end{Bmatrix}$$

Coeficiente de Regressão r1= 0.95146 da equação (16).
O vetor {x}={bo b1 b2} da eq.(17) é:

$$x=\begin{Bmatrix}0.63192\\ 0.00077331\\ 12199\end{Bmatrix}$$

Coeficiente de Regressão r1= 0.97572 da equação (17).
O vetor {x}={bo b1 b2} da eq.(18) é:

$$\begin{Bmatrix}-0.55483\\ 0.0057206\\ 32083\\ -5.7673e-006\end{Bmatrix}$$

Coeficiente de Regressão r1= 0.99085 da equação (18).
Obtemos um gráfico com os dados acima, mostrados na Fig. 1.

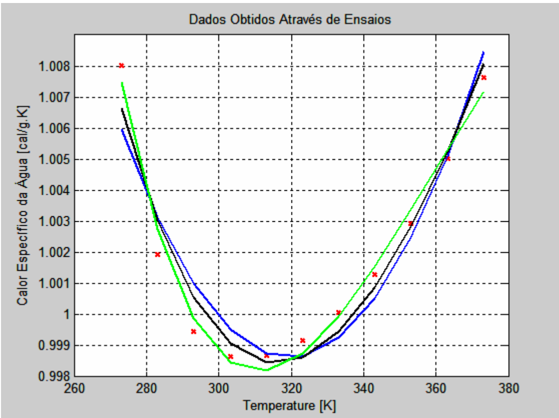

Fig. 1 – Dados comparativos

Dados obtidos experimentalmente na cor vermelha.
Dados segundo Eq. (16) na cor azul.
Dados segundo Eq. (17) na cor preto.
Dados segundo Eq. (18) na cor verde.

CONCLUSÕES

A utilização do método dos mínimos quadrados para resolução de sistemas superdeterminados é muito eficaz na obtenção da solução e na minimização dos erros de aproximação dos valores obtidos e também muito mais prático que outros métodos já estudados e utilizados.

BIBLIOGRAFIA

CUNHA, M. C. C. (2003), *Métodos numéricos*, Editora Unicamp, Campinas-SP, 2ª ed., 280p.
FREITAS, DANIEL, S., INE, Departamento de informática e de estatística, UFSC, http://www.inf.ufsc.br/~santana/
LIMA Jr, J.J. (2005), Notas de aulas, *Métodos Matemáticos para Sistemas Mecânicos*, MPF01, UNIFEI.
RUGGIERO, M. A. G. (1996), Cálculo Numérico: Aspectos teóricos, 2° Ed., Makron Books, São Paulo
SANTOS, V. R. B. (1974), Curso de Cálculo Numérico, 2° ed., Livros técnicos e Científicos Editora S.A., 255p.
SANTOS, V. R. B. (1977), *Curso de Cálculo Numérico*, Livros Técnicos e Científicos Editora, Rio de Janeiro-RJ, 3° ed. Reimpressão, 276p.
SADOSKY, M. (1965), *Cálculo numérico y gráfico*, Librería del Colégio - Sociedad Anónima, Buenos Aires-AR, 5ª ed., 357p.
SOUZA, M.J.F, Departamento de computação, UFOP, http://www.decom.ufop.br/prof/marcone