MSc Alexandre Estácio Féo
Associação Educacional Dom Bosco - Faculdade de Engenharia de Resende
Caixa Postal: 81.698/81711 - CEP: 27511-971 - Resende - RJ – Brasil
Professor e Doutorando de Engenharia
aefeo1@yahoo.com.br

Resumo:

Serão apresentados neste trabalho os Métodos Iterativos da Potência e Inverso, que são utilizados para encontrar os autovalores máximo e mínimo, assim como os autovetores respectivos, de uma matriz real e simétrica Paralelamente, será desenvolvido um programa em Matlab para a implementação computacional do método, assim como a resolução de um sistema proposto. O método da Potência não é um método geral, mas é útil em um grande número de situações: muitas vezes, satisfatório quando o problema envolve matrizes esparsas grandes; outras, quando outros métodos, desenvolvidos mais recentemente, não podem ser utilizados devido às limitações de tamanho de memória dos computadores (Atkinson, 1978). É, portanto, um método de difícil implementação de programas de computador para situações mais generalizadas; sendo, porém, fácil, quando se trata de classes mais especiais de matrizes. Vale ressaltar que o Método da Iteração Inversa utiliza um procedimento similar ao método da Potência, usado para determinar o autovalor mínimo de uma matriz A.

Palavras-Chave: Métodos Interativos da Potência e Inverso, Sistemas Lineares, Autovetores e Autovalores.

INTRODUÇÃO

O método da Potência não é um método geral, mas é útil em um grande número de situações.

Por exemplo, é muitas vezes satisfatório quando o problema envolve matrizes esparsas grandes, onde outros métodos desenvolvidos mais recentemente, não podem ser usados devido às limitações de tamanho de memória dos computadores (Atkinson, 1978).

É, portanto, um método de difícil implementação de programas de computador, para situações mais generalizadas; sendo, porém, fácil, quando se trata de classes mais especiais de matrizes.

O Método da Iteração Inversa utiliza um procedimento similar ao método da Potência, usado para determinar o autovalor mínimo de uma matriz A.

OBJETIVO

Entender o desenvolvimento teórico do método da Potência e também entender o desenvolvimento teórico do método da Iteração Inversa, a fim de construir um programa para implementação dos mesmos, através do Matlab.

DESENVOLVIMENTO do Método da Potência

Abordaremos ligeiramente o problema da determinação de valores e vetores próprios de uma matriz, ou seja, estamos interessados em achar os valores de λ (valores próprios) para os quais existem x não nulos (vetores próprios) tais que

$$Ax = \lambda x \qquad (1)$$

Isto corresponde a encontrar as soluções da equação polinomial

$$\left|A - \lambda I\right| = 0 \qquad (2)$$

já que $p\left(\lambda\right) = \left|A - \lambda I\right|$ define um polinômio denominado polinômio característico.

Se tratar de uma matriz nxn, então p é um polinômio de grau n e há n raízes, ou seja, n valores próprios, que designaremos de $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. Alguns valores podem ser iguais, correspondendo a raízes múltiplas. A cada valor próprio está associado um vetor próprio, constituindo assim, um subespaço linear, designado subespaço próprio.

Consideraremos apenas o caso mais favorável, ou seja, o caso em que as matrizes são diagonalizáveis.

$$A = X\,diag(\lambda_i)X^{-1} = Xdiag(\lambda_i)Y^T = \sum_1^n \lambda_i x_i y_i^T \qquad (3)$$

onde as colunas x_i de X e as linhas y_i^T de Y^T são os autovetores à direita e à esquerda de A normalizado afim de que $y_i^T x_i = I$.

Disto $A^s = X\,diag(\lambda_i^s)Y^T = \sum_1^n \lambda_i^s x_i y_i^T$ e se

$\left|\lambda_1\right| = \left|\lambda_2\right| = \ldots = \left|\lambda_n\right| > \left|\lambda_{r+1}\right| \geq \ldots \left|\lambda_n\right|$ a expressão no lado direito A^s é definitivamente dominada pelos termos $\sum_1^n \lambda_i^s x_i y_i^T$. Este é o resultado fundamental no qual este método é baseado.

Relembramos ainda que no caso em que as matrizes são simétricas os seus autovalores são números reais; e que o determinante da matriz A é igual ao produto dos seus autovalores, o que nos afirma que a inversibilidade de uma matriz não ocorre se tivermos um autovalor nulo (Almeida, 2004).

Iremos referir aos autovalores $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ como dominantes e aos autovetores correspondentes também dominantes. Comumente r=1 e neste caso A^s é finalmente dominado por $\lambda_1^s x_1 y_1^T$.

Método das Potências

A aplicação mais simples do método da potência é o seguinte.

Deixemos u_0 ser um vetor arbitrário e deixemos as seqüências v_s e u_s serem definidas pelas equações $v_{s+1} = Au_s$, $u_{s+1} = v_{s+1} / \max(v_{s+1})$, (4)

onde usamos a notação max(x) para representar o elemento de maior módulo do vetor x. Claramente teremos $u_s = A^s u_0 / \max(A^s u_0)$ e se escrevermos $u_0 = \sum_1^n \alpha_i x_i$, então independentemente do fator de normalização, u_s é dado por $\sum_1^n \alpha_i \lambda_i^s x_i = \lambda_i^s \left[\alpha_1 x_1 + \sum_2^n \alpha_i (\lambda_i / \lambda_1)^s x_i\right]$.

Se $\left|\lambda_1\right| > \left|\lambda_2\right| \geq \left|\lambda_3\right| \geq \ldots \geq \left|\lambda_n\right|$, então fornece $\alpha_1 \neq 0$ teremos $u_s \rightarrow x_1 / \max(x_1)$ e $\max(v_s) \rightarrow \lambda_1$.

Este método permite obter de forma simples uma aproximação do autovalor dominante, ou seja, aquele que tem o maior módulo, por um processo iterativo, desde que seja real.

Lembramos que assumimos que a matriz A é diagonalizável e que existe um único autovalor dominante.

Determina-se então uma aproximação do autovetor associado e a partir dessa aproximação do autovetor podemos calcular uma aproximação do autovalor.

O método consiste em escolhermos um vetor inicial u_0, aleatoriamente. Tendo como única exigência que este vetor seja não nulo.

EXEMPLO RESOLVIDO

$$\text{Seja } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \varepsilon < 0.01.$$

Por ser uma matriz 2x2 é fácil, algebricamente encontrarmos os autovalores e autovetores.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} (2-\lambda)^2 - 1 = 0 \\ \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \end{matrix}$$

Resolvendo: $\begin{matrix} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 1 \end{matrix}$

Calculemos agora os autovetor associado ao maior λ, que é 3:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 3x \\ x + 2y = 3y \\ x = y \end{cases}$$

Podemos dizer que o vetor associado é $x = [1 \quad 1]^T$.

Vamos verificar agora, através do método da Potência, se os resultado vão convergir para os valores encontrados algebricamente.

Como vetor inicial temos $\{x\}_0 = [0.9 \quad 0.8]^T$.

Normalizando

$$\{y\}_0 = \begin{bmatrix} 0.9/0.9 \\ 0.8/0.9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 0.8889 \end{bmatrix}$$

Procedemos, agora o cálculo da equação (4):

$$\{x\}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 0.8889 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.8889 \\ 2.7778 \end{bmatrix}$$

Fazendo o teste de convergência:

$$\frac{2.8889 - 1.0000}{2.8889} = 0.6538 > \varepsilon$$

Normalizando $\{x\}_1$:

$$\{y\}_1 = \begin{bmatrix} 2.8889 / 2.8889 \\ 2.7778 / 2.8889 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 0.9615 \end{bmatrix}$$

Calculando $\{x\}_2$:

$$\{x\}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 0.9615 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.9615 \\ 2.9231 \end{bmatrix}$$

Fazendo o teste de convergência:

$$\frac{2.9615 - 2.8889}{2.9615} = 0.0245 > \varepsilon$$

Normalizando $\{x\}_2$:

$$\{y\}_2 = \begin{bmatrix} 2.9615 / 2.9615 \\ 2.9231 / 2.9615 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.9957 \end{bmatrix}$$

Calculando $\{x\}_3$:

$$\{x\}_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 0.9957 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.9870 \\ 2.9740 \end{bmatrix}$$

Fazendo o teste de convergência:

$$\frac{2.9870 - 2.9615}{2.9870} = 0.0085 < \varepsilon$$

Cálculo de λ:

$$\lambda = +2.9870 = 2.9870$$

O autovalor que nos dá a precisão desejada ($\varepsilon < 0.01$) é $\lambda = 2.9870$ e o autovetor associado a este autovalor é $x = \begin{bmatrix} 1 & 0.9957 \end{bmatrix}$, após 3(três) iterações.

Isto nos dá a eficiência de convergência do método em questão, pois vemos que os valores realmente se aproximam, cada vez mais, dos valores encontrados algebricamente.

CONCLUSÃO

O método da Potência é um método de fácil compreensão e simples implementação computacional, nos fornecendo o autovalor máximo, ou seja, o último autovalor de uma matriz, e seu respectivo autovetor.

Método da Iteração Inversa

Este método permite obter de forma simples uma aproximação do autovalor mínimo, ou seja, aquele que tem o menor módulo, por um processo iterativo, desde que seja real.

Lembramos que assumimos que a matriz A é diagonalizável e que existe um único autovalor mínimo.

Determina-se então uma aproximação do autovetor associado e a partir dessa aproximação do autovetor podemos calcular uma aproximação do autovalor.

O método consiste em escolhermos um vetor inicial $\{x\}_0$, aleatoriamente. Tendo como única exigência que este vetor seja não nulo.

Procedemos, então a normalização deste vetor, ou seja

$$\{y\}_0 = \frac{\{x\}_0}{\left\|\{x\}_0\right\|_A} \qquad (5)$$

sendo $\left\|\{x\}_0\right\|_A = |\lambda_i|_{máx}$.

Após isso procedemos a multiplicação matricial

$$[A]\{x\}_1 = \{y\}_0 \qquad (6)$$

Procedemos, então a normalização do novo vetor x:

$$\{y\}_1 = \frac{\{x\}_1}{\left\|\{x\}_1\right\|_A} \qquad (7)$$

Fazemos $[A]\{x\}_2 = \{y\}_1$. E assim sucessivamente, achando quantos autovetores forem necessários.

Paramos com os cálculos acima, quando o erro verificado no teste de convergência for menor do que o erro pretendido por nós. O teste de convergência para este método consiste em calcularmos

$$\frac{\left\|\{x\}_{i+1}\right\|_A - \left\|\{x\}_i\right\|_A}{\left\|\{x\}_{i+1}\right\|_A} < \varepsilon \qquad (8)$$

Calculamos, finalmente, o autovalor correspondente

$$\frac{1}{\lambda} = \underbrace{\sin al|x_i|_{máx}}_{+\ ou\ -} * \left\|\{x\}_i\right\|_A \qquad (9)$$

O sinal da razão acima é o sinal da componente com maior módulo.

O vetor inicial é aleatório, embora exista uma probabilidade (que podemos considerar nula) de que para certos vetores iniciais o método não convirja. Isto apenas acontece quando $\{x\}_0$ tem componente nula segundo o autovetor mínimo, o que é altamente improvável.

De qualquer forma, e como convém que todo método que o método convirja mais rapidamente é habitualmente aconselhável começar com um vetor inicial que seria autovetor para o maior elemento (em módulo) da matriz formada apenas pela diagonal.

EXEMPLO RESOLVIDO

$$\text{Seja } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \varepsilon < 0{,}005.$$

Por ser uma matriz 2x2 é fácil, algebricamente encontrarmos os autovalores e autovetores.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(2-\lambda)^2 - 1 = 0$$
$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

Resolvendo:

$$\lambda_1 = 3$$
$$\lambda_2 = 1$$

Calculemos agora os autovetor associado ao maior λ, que é 3:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 3x \\ x + 2y = 3y \\ x = y \end{cases}$$

Podemos dizer que o vetor associado é $x = [1 \;\; 1]^T$.

Vamos verificar agora, através do método da Potência, se os resultado vão convergir para os valores encontrados algebricamente.

Como vetor inicial escolhemos:

$$\{x\}_0 = [0{,}9\ ;\ 0{,}8]^T$$

Normalizando $\{x\}_0$:

$$\{y\}_0 = \begin{bmatrix} 0{,}9/0{,}9 \\ 0{,}8/0{,}9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}888 \end{bmatrix}$$

Procedemos, agora o cálculo da equação (8):

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \{x\}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}888 \end{bmatrix} \Rightarrow \{x\}_1 = \begin{bmatrix} 3{,}73 \\ -6{,}47 \end{bmatrix}$$

Fazendo o teste de convergência:

$$\frac{3{,}73 - 0{,}9}{3{,}73} = 0{,}759 > \varepsilon$$

Normalizando $\{x\}_1$:

$$\{y\}_1 = \begin{bmatrix} 3{,}73/3{,}73 \\ -6{,}47/3{,}73 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1{,}75 \end{bmatrix}$$

Calculando $\{x\}_2$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \{x\}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1{,}75 \end{bmatrix} \Rightarrow \{x\}_2 = \begin{bmatrix} 1{,}24 \\ -1{,}48 \end{bmatrix}$$

Fazendo o teste de convergência:

$$\frac{1{,}24 - 3{,}73}{1{,}24} = 2{,}008 > \varepsilon$$

Normalizando $\{x\}_2$:

$$\{y\}_2 = \begin{bmatrix} 1{,}24/1{,}24 \\ -1{,}48/1{,}24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1{,}19 \end{bmatrix}$$

Calculando $\{x\}_3$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \{x\}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1{,}19 \end{bmatrix} \Rightarrow \{x\}_3 = \begin{bmatrix} 1{,}06 \\ -1{,}12 \end{bmatrix}$$

Fazendo o teste de convergência:

$$\frac{1{,}06 - 1{,}24}{1{,}06} = 0{,}1698 > \varepsilon$$

Normalizando $\{x\}_3$:

$$\{y\}_3 = \begin{bmatrix} 1{,}06/1{,}06 \\ -1{,}12/1{,}06 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1{,}06 \end{bmatrix}$$

Calculando $\{x\}_4$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \{x\}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1{,}06 \end{bmatrix} \Rightarrow \{x\}_4 = \begin{bmatrix} 1{,}02 \\ -1{,}04 \end{bmatrix}$$

Fazendo o teste de convergência:

$$\frac{1{,}02 - 1{,}06}{1{,}02} = 0{,}0392 > \varepsilon$$

Normalizando $\{x\}_4$:

$$\{y\}_4 = \begin{bmatrix} 1{,}02/1{,}02 \\ -1{,}04/1{,}02 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1{,}02 \end{bmatrix}$$

Calculando $\{x\}_5$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \{x\}_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1{,}02 \end{bmatrix} \Rightarrow \{x\}_5 = \begin{bmatrix} 1{,}007 \\ -1{,}014 \end{bmatrix}$$

Fazendo o teste de convergência:

$$\frac{1{,}007 - 1{,}02}{1{,}007} = 0{,}013 > \varepsilon$$

Normalizando $\{x\}_5$:

$$\{y\}_5 = \begin{bmatrix} 1{,}007/1{,}007 \\ -1{,}014/1{,}007 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1{,}007 \end{bmatrix}$$

Calculando $\{x\}_6$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \{x\}_6 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1{,}02 \end{bmatrix} \Rightarrow \{x\}_6 = \begin{bmatrix} 1{,}0023 \\ -1{,}0046 \end{bmatrix}$$

Fazendo o teste de convergência:

$$\frac{1{,}0023 - 1{,}007}{1{,}0023} = 0{,}0047 < \varepsilon$$

Cálculo de λ:

$$\lambda = 1{,}0023$$

O autovalor que nos dá a precisão desejada é $\lambda = 1{,}0023$ e o autovetor associado a este autovalor é $x = [1 \quad -1{,}0046]$.

Isto nos dá a eficiência de convergência do método em questão, pois vemos que os valores realmente se aproximam, cada vez mais, dos valores encontrados algebricamente.

CONCLUSÃO

Os métodos da Potência e da Iteração Inversa são métodos de fácil compreensão e simples implementação computacional, nos fornecendo o autovalor máximo e mínimo e seus respectivos autovetores.

BIBLIOGRAFIA

ATKINSON, Kendall, 1978 – An Introduction to Numerical Analysis, John Wiley & Sons, Iowa, 587p.

ALMEIDA, R., Departamento de Matemática, Universidade da Beira Interior, http://www.demat.ubi.bt/~ralmeida.

WILKINSON, J. H. , 1965 – The Algebraic Eigenvalue Problem, Clarendon Press - Oxford, London, 662p