

Métodos de identificação: um estudo comparativo para levantamento de modelos a partir de dados de resposta em frequência.

Autores: Michele Ferreira Nunes, Roberto Ades, Dr PUC-Rio e Geraldo Magela Pinheiro Gomes , Dr. ENSAE

Emails: mfenunes@yahoo.com.br,
rades@ime.eb.br e
gmpinheiro@ime.eb.br

Abstract

This work presents a comparative study between methodologies to modelling a physical system, using your frequency response. The methodologies consider as adjustment criterion the minimization of the error calculated from 2-norm. In the final part of of the paper, an example is presented using the discussed methods. The results are compared and the frequency response from some models are plotted.

Keywords - Identification, transfer function, frequency response, linear systems.

Resumo

Este trabalho apresenta um estudo comparativo entre metodologias de identificação para determinação da função de transferência de um sistema físico, utilizando as características de resposta em frequência do sistema. As metodologias abordadas consideram como critério de ajuste a minimização do erro calculado em norma quadrática. Na parte final do artigo, apresenta-se um exemplo, onde são aplicados os métodos de identificação citados e realizadas as devidas comparações entre os custos obtidos. As respostas em frequência de alguns dos modelos calculados são também apresentadas.

Palavras-chave - identificação, função de transferência, resposta em frequência, sistemas lineares.

Introdução

A evolução do conhecimento científico ao longo dos séculos vem se baseando em leis matemáticas que descrevem os fenômenos físicos observados na natureza. Através de modelos matemáticos, pode-se prever o comportamento de um sistema, possibilitando simulá-lo sob diversas condições de operação. A partir desses modelos, é possível alterar o desempenho do sistema em malha fechada ajustando controladores. O modelo matemático de um sistema pode ser calculado partindo-se das leis físicas que regem sua dinâmica. Entretanto, para sistemas muito complexos, a modelagem convencional do processo normalmente torna-se inviável, já que as relações entre as diversas grandezas físicas envolvidas não são totalmente conhecidas e, conseqüentemente, não se pode determinar um modelo com a precisão necessária.

É nesse contexto que surge a Identificação de Sistemas. Os modelos matemáticos são construídos numericamente a partir das respostas produzidas de entradas fornecidas. Esses sinais são medidos simultaneamente a uma taxa de amostragem compatível. Os modelos matemáticos obtidos através deste processo conseguem reproduzir características dinâmicas e estáticas do sistema original. A identificação surge como uma ferramenta alternativa, e mais prática, para a obtenção de um modelo matemático numérico, adaptado a um determinado ponto de operação do sistema.

A identificação pode ser realizada no domínio do tempo ou da frequência.

As duas formas apresentam resultados bastante eficientes, porém [14] apresenta, entre outras, as seguintes vantagens deste último grupo: maior facilidade na redução do ruído, redução do volume de dados e a desconsideração do estado inicial. No domínio da frequência, os dados medidos estão relacionados com as características da resposta em frequência do sistema sob teste.

Para os sistemas físicos que não admitem entradas oscilatórias, é possível empregar a FFT (*Fast Fourier Transform*) sobre um par de sinais de entrada e saída, obtendo um conjunto de dados de resposta em frequência $(\omega_i, G_f(j\omega))$; $i = 1, \dots, m$ do sistema sob teste. A aplicação da FFT com esse fim, já foi utilizada por diversos autores como [13], [15], [3] e [1].

Diversas abordagens têm sido apresentadas para o problema da identificação no domínio da frequência. Observa-se que muitos autores como [11], [16], [14], [7], [12], [5] e [6] procuraram abordagens, utilizando-se do Método dos Mínimos Quadrados. Observa-se também em alguns trabalhos como [10], [9], [4] e [1] o uso de algoritmos com duas fases. Na primeira, uma estimação de alta ordem é realizada e na segunda ocorre uma redução de ordem do modelo por realização balanceada. Outra característica frequentemente observada é o uso de algoritmos iterativos como em [16], [14] e [4]. Em todos esses trabalhos, nota-se a preocupação em obter soluções analíticas, o que normalmente só é possível em problema convexas.

Neste artigo, todos os métodos abordados procuram resolver o problema de determinar uma função de transferência racional de ordem n , $G_e^n(s)$, que aproxime um conjunto de dados de resposta em frequência $G_f(j\omega)$ fornecido

de um sistema dinâmico linear em observação. Em princípio, considera-se que os dados de resposta em frequência, $G_f(j\omega)$, estejam disponíveis somente em um conjunto discreto de frequências $\underline{\omega} = [\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_m]$. Quando as frequências $\underline{\omega}$ puderem ser escolhidas, sugere-se a adoção de um espaçamento logarítmico entre elas.

Os métodos abordados também podem ser aplicados no cálculo de modelos linearizados sobre pontos de operação de um sistema não-linear, bem como no levantamento da matriz de transferência de um sistema MIMO linear, considerando cada par entrada-saída isoladamente e o princípio da superposição.

Este artigo tem como objetivo apresentar um estudo comparativo com alguns dos métodos disponíveis na literatura sobre o problema abordado, trazendo algumas contribuições, sem contudo ter a pretensão de extinguir o assunto.

Método de Levy

Esse método foi proposto em [11]. As partes real e imaginária dos dados de resposta em frequência fornecidos, $G_f(j\omega)$, são tratadas separadamente. Considera-se que esses dados possam ser aproximados por um modelo $G_e^n(s)$, que corresponde a razão de dois polinômios de ordem n dependentes de uma variável complexa s :

$$G_e^n(s) = \frac{a_0 + a_1s + \dots + a_ns^n}{1 + b_1s + \dots + b_ns^n} \quad (1)$$

Deseja-se ajustar o modelo $G_e^n(s)$ de maneira que: $G_f(j\omega) \cong G_e^n(j\omega)$ para $\underline{\omega} = [\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_m]$.

Os vetores de coeficientes $\underline{a} = [a_0 + a_1 + \dots + a_n]$ e $\underline{b} = [b_1 + \dots + b_n]$ são determinados por intermédio da resolução do sistema de equações lineares, conforme será apresentado em (12). Desenvolvendo a equação em (1) é possível reescrevê-la na forma:

$$G_e^n(s) = \frac{a_0 + a_1(j\omega) + \dots + a_n(j\omega)^n}{1 + b_1(j\omega) + \dots + b_n(j\omega)^n} \quad (2)$$

$$G_e^n(s) = \frac{\alpha + j\omega\beta}{\sigma + j\omega\tau} = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)} \quad (3)$$

sendo:

$$\begin{aligned} \alpha &= a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \dots \\ \beta &= a_1 - a_3\omega^3 + a_5\omega^5 - \dots \\ \sigma &= 1 - b_2\omega^2 + b_4\omega^4 - \dots \\ \tau &= b_1 - b_3\omega^3 + b_5\omega^5 - \dots \end{aligned} \quad (4)$$

O ajuste do modelo é realizado por intermédio de uma função de erro, definida como:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\omega) &\cong G_f(\omega) - G_e(\omega) \\ \varepsilon(\omega) &\cong G_f(\omega) - \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)} \end{aligned} \quad (5)$$

Desenvolvendo (5):

$$D(j\omega)\varepsilon(\omega) \cong D(j\omega)G_f(\omega) - N(j\omega) \quad (6)$$

$$D(j\omega)\varepsilon(\omega) = A(\omega) + jB(\omega) \quad (7)$$

onde A e B são funções dependentes da frequência ω e dos coeficientes $a_0 + a_1 + \dots + a_n, \dots, b_1, \dots, b_n$.

O próximo passo consiste em estabelecer uma função custo E, cuja minimização permitirá determinar os coeficientes do modelo. A função custo E é definida como:

$$E := |D(j\omega)\varepsilon(\omega)|_2^2 = |A(\omega) + jB(\omega)|_2^2 \quad (8)$$

$$E = \sum_{k=0}^m A^2(\omega_k) + B^2(\omega_k) \quad (9)$$

De acordo com (6) e (7):

$$A(j\omega) = \Re e [D(j\omega)G_f(\omega) - N(j\omega)]$$

$$B(j\omega) = \Im m [D(j\omega)G_f(\omega) - N(j\omega)] \quad (10)$$

onde $\Re e[]$ e $\Im m[]$ representam, respectivamente, a parte real e a parte imaginária do argumento.

Dado que $G_f(\omega) := Y(\omega) + jI(\omega)$, sabendo que $Y_k := Y(\omega_k)$ e $I_k := I(\omega_k)$ e utilizando (3), é possível reescrever (10) como:

$$\begin{aligned} E &= \sum_{k=0}^m [(\sigma_k Y_k - \omega_k \tau_k I_k - \alpha_k)^2 + \\ &+ (\sigma_k I_k - Y_k \omega_k \tau_k - \omega_k \beta_k)^2] \end{aligned} \quad (11)$$

Derivando parcialmente (11) com relação aos coeficientes $a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ e igualando-os a zero, após muitos cálculos algébricos chega-se ao seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{aligned} M N &= P \quad (12) \\ \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} S_0 \\ T_1 \\ S_2 \\ T_3 \\ \vdots \\ 0 \\ U_2 \\ 0 \\ U_4 \\ \vdots \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

onde:

$$M_1 = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & -\lambda_2 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_2 & 0 & -\lambda_4 & \dots \\ \lambda_2 & 0 & -\lambda_4 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_4 & 0 & -\lambda_6 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} T_1 & S_2 & -T_3 & -S_4 & \dots \\ -S_2 & T_3 & S_4 & -T_5 & \dots \\ T_3 & S_4 & -T_5 & -S_6 & \dots \\ -S_4 & T_5 & S_6 & -T_7 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} T_1 & -S_2 & -T_3 & S_4 & \dots \\ S_2 & T_3 & -S_4 & -T_5 & \dots \\ T_3 & -S_4 & -T_5 & S_6 & \dots \\ S_4 & T_5 & -S_6 & -T_7 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$M_4 = \begin{bmatrix} U_2 & 0 & -U_4 & 0 & \dots \\ 0 & U_4 & 0 & -U_6 & \dots \\ U_4 & 0 & -U_6 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix} \quad (17)$$

e os elementos das matrizes M, N e P são calculados através das seguintes expressões:

$$\lambda_h = \sum_{k=0}^m \omega_k^h \quad S_h = \sum_{k=0}^m \omega_k^h Y_k$$

$$T_h = \sum_{k=0}^m \omega_k^h I_k \quad U_h = \sum_{k=0}^m \omega_k^h (Y_k^2 + I_k^2)$$

3 Método de Levy modificado

A partir dos resultados observados com a utilização do Método de Levy [11], constatou-se que em problemas com ordem superior a 5, o cálculo da solução tornava-se inviável devido ao mal

condicionamento da matriz M em (12). Para melhorar este método foram propostas as seguintes medidas:

- normalização da janela de resposta em frequência, de modo que a frequência máxima seja 2 rad/s;
- aplicação de escalonamento e pivoteamento parcial na resolução do sistema em (12), em substituição ao cálculo da pseudo-inversa;
- determinação da posição ótima dos zeros do modelo estimado, segundo o critério em (18).

Propõe-se que os pólos calculados pelo algoritmo de Levy, através dos coeficientes b_1, \dots, b_n , sejam utilizados no modelo final. Os zeros são recalculados analiticamente, minimizando o seguinte critério:

$$\min_{\alpha \in \mathfrak{R}^{n+1}} J(\alpha) = \min_{\alpha \in \mathfrak{R}^{n+1}} \left\| G_f(j\omega) - \sum_{k=0}^n \alpha_k R_k(j\omega) \right\|_2^2 \quad (18)$$

Com $R_k(s), k = 0, \dots, n$, uma função da forma:

$$R_k(s) = \frac{s^k}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + 1} \quad (19)$$

Os parâmetros $a = [a_0, \dots, a_n]$ correspondem aos coeficientes do polinômio do numerador do modelo e serão calculados para determinar as novas posições dos zeros. O modelo final é dado pela expansão do seguinte Conjunto Gerador:

$$G_e^n(s) = \sum_{k=0}^n \alpha_k R_k(s) \quad (20)$$

3.1 Normalização da resposta em frequência

A medida em que os valores das frequências utilizadas aumentam, os elementos da matriz M em (12) crescem tornando-a mal condicionada. Para melhorar o condicionamento dessa matriz, propõe-se a normalização da faixa de frequência ω empregada. Para isso, o vetor de frequências é escalonado através de um fator $\delta = 0,5 \omega_{\max}$. O novo vetor de frequências é determinado por:

$$\omega_N = \frac{\omega}{\delta} = \frac{\omega}{0,5 \omega_{\max}}$$

onde ω_{\max} é a maior frequência contida em ω . Após determinar o modelo $G_e^n(s)$, a desnormalização da faixa de frequência é realizada pela substituição da variável s por δs .

3.2 Cálculo da posição ótima dos zeros

Considerando que o polinômio característico de $R_k(s)$ esteja previamente determinado, pode-se calcular o conjunto de zeros do modelo $G_e^n(\underline{\alpha}, s)$, que proporciona o melhor ajuste segundo o critério em (20).

Nesse critério, o vetor de parâmetros a ser calculado \underline{a} define os coeficientes do polinômio, cujas raízes da equação correspondente são denominadas de zeros ótimos do problema. Nesse método, determinam-se os pólos através do método de Levy, e calcula-se para esse conjunto de pólos os seus zeros ótimos correspondentes.

Esse equacionamento encontra-se demonstrado em [1]. A solução analítica é obtida igualando-se o vetor gradiente da função custo em (18) ao vetor nulo. Após alguns cálculos algébricos, chega-se a um

sistema de equações lineares da forma $\overline{M} \overline{N} = \overline{P}$ com:

$$\overline{M} = \sum_{i=0}^m \Re e \begin{bmatrix} R_0 R_0^* & R_0 R_1^* & \cdots & R_0 R_n^* \\ R_1 R_0^* & R_1 R_1^* & \cdots & R_1 R_n^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_n R_0^* & R_n R_1^* & \cdots & R_n R_n^* \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\overline{P} = \sum_{i=0}^m \Re e \begin{bmatrix} R_0 G_f^* \\ R_1 G_f^* \\ \vdots \\ R_n G_f^* \end{bmatrix} \quad (22)$$

onde $\overline{N} = \underline{\alpha}^T$; $R_k \equiv R_k(j\omega_i)$, para $k = 0, \dots, n$ e $i = 0, \dots, m$; o símbolo $*$ representa a matriz complexa conjugada de mesmas dimensões do argumento. A implementação computacional de (21) e (22) pode ser facilitada por:

$$\begin{aligned} \overline{M} &= \Re e \{ Rsn^T Rsn^* \} \\ \overline{P} &= \Re e \{ Rsn^T G_f^* \} \end{aligned} \quad (23)$$

onde Rsn é uma matriz de dimensão $(m+1) \times (n+1)$, com a forma:

$$Rsn = \begin{bmatrix} R_0(j\omega_0) & R_1(j\omega_0) & \cdots & R_n(j\omega_0) \\ R_0(j\omega_1) & R_1(j\omega_1) & \cdots & R_n(j\omega_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_0(j\omega_m) & R_1(j\omega_m) & \cdots & R_n(j\omega_m) \end{bmatrix} \quad (24)$$

4 Método de imposição de pólos e ajuste ótimo dos zeros

Esse método foi desenvolvido em [1]. Os modelos estimados são gerados por uma expansão do Conjunto Gerador em (20).

Essa metodologia é, basicamente, um algoritmo computacional. A idéia

principal que norteia esse algoritmo está relacionada com a possibilidade de se determinar, analiticamente, segundo o critério em (18), a posição ótima dos zeros de um modelo, de acordo com a metodologia apresentada no subitem 3.2, considerando que as posições dos pólos já estejam definidas. Escolhida a ordem do modelo, o algoritmo varia iterativamente as posições dos pólos no semiplano s da esquerda e, para cada um desses conjuntos, determina as posições ótimas dos zeros correspondentes. O modelo que apresenta o menor custo de ajuste entre os testados, é mantido armazenado. Esse custo é comparado com os dos demais modelos que serão calculados nas iterações seguintes, variando-se as posições dos pólos.

Para facilitar a varredura no semiplano s da esquerda, procura-se utilizar algumas das informações disponibilizadas pelos pontos de resposta em frequência fornecidos. Caso o diagrama de resposta em frequência apresente picos de ressonância, as frequências correspondentes são armazenadas em um vetor e são utilizadas como a parte imaginária de um par de pólos complexos conjugados. A parte real desses pólos é variada dentro de um intervalo, adotando-se um determinado passo. Quanto menor o passo, maior o número de iterações do algoritmo.

Após tentar acrescentar no modelo um número previamente definido de pólos complexos conjugados, tenta-se também a inclusão de pólos reais. Ainda que haja um número de iterações relativamente grande, os tempos de processamento computacional nos exemplos testados, utilizando os microcomputadores atualmente disponíveis, têm sido baixos, da ordem de poucos segundos. Caso seja de interesse do usuário ajustar um pouco mais o modelo obtido, é possível empregar esse

modelo como ponto inicial na metodologia comentada no item 7 sobre Conjuntos Geradores Otimizados, logicamente às custas de um maior tempo de processamento computacional.

5 Método baseado em equações diferença na frequência

Esse método foi apresentado em [6]. Os coeficientes do modelo são ajustados com o auxílio da técnica dos mínimos quadrados. Considera-se a seguinte função custo:

$$J(\underline{a}, \underline{b}) = \|G_f(j\omega) - G_e^n(\underline{a}, \underline{b}, j\omega)\|_2 \quad (25)$$

onde $G_e^n(\underline{a}, \underline{b}, s)$ é da forma em (1).

Adotando a seguinte notação $G_{j\omega_i} \equiv G_f(j\omega_i)$ e fazendo $s = j\omega_i$ em (1):

$$G_{j\omega_i} [1 + \sum_{p=1}^n b_p (j\omega_i)^p] = \sum_{q=0}^n a_q (j\omega_i)^q$$

$$\sum_{q=0}^n a_q (j\omega_i)^q - G_{j\omega_i} \sum_{p=1}^n b_p (j\omega_i)^p = G_{j\omega_i} \quad (26)$$

Como $i \in \{0, 1, \dots, m\}$, obtém-se o seguinte sistema de equações lineares:

$$\hat{M} \hat{N} = \hat{P} \quad (27)$$

$$[\hat{M}_1 \quad \hat{M}_2] \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \\ -b_1 \\ \vdots \\ -b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{j\omega_0} \\ G_{j\omega_1} \\ \vdots \\ G_{j\omega_m} \end{bmatrix} \quad (28)$$

sendo:

$$\hat{M}_1 = \begin{bmatrix} (j\omega_0)^0 & (j\omega_0)^1 & \cdots & (j\omega_0)^n \\ (j\omega_1)^0 & (j\omega_1)^1 & \cdots & (j\omega_1)^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (j\omega_m)^0 & (j\omega_m)^1 & \cdots & (j\omega_m)^n \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\hat{M}_2 = \begin{bmatrix} G_{j\omega_0}(j\omega_0)^0 & \cdots & G_{j\omega_0}(j\omega_0)^n \\ G_{j\omega_1}(j\omega_0)^0 & \cdots & G_{j\omega_1}(j\omega_1)^n \\ \vdots & & \vdots \\ G_{j\omega_m}(j\omega_m)^0 & \cdots & G_{j\omega_m}(j\omega_m)^n \end{bmatrix} \quad (30)$$

No sistema em (27), as matrizes \hat{M} e \hat{P} possuem elementos complexos. A fim de evitar problemas numéricos, sugere-se que as equações formadas por cada linha dessas matrizes sejam separadas em parte real e parte imaginária, dobrando o número de equações, mas garantindo que as variáveis calculadas sejam reais.

Em [6], sugere-se a pseudo-inversa como solução do sistema em (27), isto é:

$$\begin{aligned} \hat{M}^T \hat{M} \hat{N} &= \hat{M}^T \hat{P} \\ \hat{N} &= (\hat{M}^T \hat{M})^{-1} \hat{M}^T \hat{P} = \hat{M}^\Gamma \hat{P} \end{aligned} \quad (31)$$

6 Método aperfeiçoado baseado em equações diferença na frequência

Da mesma maneira que no item 3, sugere-se como aperfeiçoamento do método no item 5, a utilização do escalonamento e pivoteamento parcial na resolução do sistema em (27), em substituição ao cálculo da pseudo-inversa. Além disso, propõe-se o reposicionamento dos zeros de acordo com a metodologia proposta no subitem 3.2.

7 Identificação utilizando Conjuntos Geradores Otimizados (CGO)

Essa metodologia foi apresentada em [2]. Considera-se $G_e^n(\underline{\theta}, s)$ uma função de transferência estimada de ordem n da forma:

$$G_e^n(\underline{\theta}, s) = \sum_{i=1}^n \theta_i v_i(s) \quad (32)$$

sendo:

$\underline{v}(s) = \{v_1(s), v_2(s), \dots\}$ um conjunto de funções de transferência cuja expansão permita gerar o espaço solução do problema tratado e $\underline{\theta} = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n]$ um vetor de parâmetros a ser ajustado.

Essa metodologia se divide em duas partes. A primeira consiste em estimar a função de transferência por um modelo, $G_e^n(\underline{\theta}, s)$, escolhendo-se previamente a ordem n e o conjunto de funções $\underline{v}(s)$. Na segunda parte da metodologia, ajusta-se o vetor de parâmetros $\underline{\theta}$ de maneira a minimizar o seguinte critério:

$$J(\underline{\theta}) = \|G_f(j\omega) - G_e^n(\underline{\theta}, j\omega)\| \quad (33)$$

Em [2], foram abordados quatro subproblemas de identificação no domínio da frequência, considerando os sistemas em estudo do tipo lineares, invariantes no tempo e de parâmetros concentrados, supondo ainda a inexistência de conhecimentos prévios de suas dinâmicas. O primeiro subproblema, chamado N2BL, considerava a norma dois no critério de custo em (33) e empregava-se as funções de Laguerre em $\underline{v}(s)$. Essas funções formam uma base ortonormal do espaço H_2^+ e possuem a seguinte forma:

$$L_k(s) = \frac{\sqrt{2c}(s-c)^{k-1}}{(s+c)^k} \quad (34)$$

para $k = 1, 2, \dots$ onde $c > 0$ é um parâmetro pré-determinado. Como a expansão da base de Laguerre contempla apenas as funções de transferência estritamente próprias, adicionou-se ao conjunto a componente $L_0 \equiv 1$, permitindo também a determinação de funções de transferência bipróprias. Esse novo conjunto foi denominado Conjunto de Laguerre Estendido. A função de transferência estimada passa a ser obtida pela seguinte expansão:

$$G_{N2BL}^n(s) = \sum_{k=0}^n \theta_k L_k(s)$$

onde n é a ordem do modelo estimado e $\theta = [\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n]$ o vetor de parâmetros a ser ajustado. Neste procedimento, os pólos da função de transferência estimada sempre se localizarão em $s = -c$, variando-se apenas os zeros. Demonstra-se em [2], que o problema assim definido é convexo em relação ao vetor de parâmetros θ .

Desenvolvendo algebricamente, chega-se a um sistema de equações lineares da forma:

$$\tilde{M} \cdot [\theta_0 \ \theta_1 \ \dots \ \theta_n]^T = \tilde{P} \quad (35)$$

com

$$\tilde{M} = \sum_{i=0}^m \Re e \begin{bmatrix} L_0 L_0^* & L_0 L_1^* & \dots & L_0 L_n^* \\ L_1 L_0^* & L_1 L_1^* & \dots & L_1 L_n^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ L_n L_0^* & L_n L_1^* & \dots & L_n L_n^* \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$\tilde{P} = \sum_{i=0}^m \Re e \begin{bmatrix} L_0 G_f^* \\ L_1 G_f^* \\ \vdots \\ L_n G_f^* \end{bmatrix} \quad (37)$$

No segundo subproblema, denominado N2CGO, utilizou-se o mesmo critério em (33) com a norma 2, porém a expansão é realizada com o seguinte Conjunto Gerador:

$$v_i(s) = \frac{1}{s + d_i} \quad (38)$$

para $i = 1, 2, \dots$ onde $d_i > 0$ são os pólos a serem determinados. O modelo estimado é obtido também por (32).

Nesse subproblema, as posições dos pólos e dos zeros são ajustadas de maneira a minimizar o critério em (33), resultando o nome de Conjunto Gerador Otimizado. Considera-se que a expansão em (32) já esteja reduzida na forma em (1), a fim de possibilitar o ajuste de pólos múltiplos em uma mesma posição do plano s . No subproblema N2CGO, a determinação dos pólos recai num problema não convexo. Embora a dificuldade na solução desse problema seja maior que no N2BL, a vantagem se refere a possibilidade de obter soluções melhor ajustadas para uma mesma ordem. Para resolver o subproblema N2CGO, utiliza-se o método numérico de programação não-linear conhecido por BFGS e o algoritmo de busca unidimensional de Wolfe, conforme [8].

Em [2], foram ainda propostos dois outros subproblemas, denominados NIBL e NICGO, que também utilizavam expansões pelas funções de Laguerre e pelo CGO, mas adotavam a norma infinito ao invés de norma 2.

Exemplo de Aplicação

Neste exemplo é utilizada um FT biprópria de 7ª ordem, cujos coeficientes encontram-se na Tabela 1. Um vetor de resposta em frequência com 200 pontos logaritmicamente espaçados, na faixa de 10^{-2} rad/s até 10^2 rad/s , é gerado a partir dessa FT e usado nas aplicações das metodologias apresentadas.

Tabela 1 – Coeficientes da FT utilizada.

Grau em s	Numerador	Denominador
S ⁷	0,1000000000	1,0000000000
S ⁶	4,7530000000	16,8200000000
S ⁵	90,012750000	252,66910000
S ⁴	863,24538250	2476,8727880
S ³	4417,8636262	13659,199979
S ²	11761,821617	59044,409874
S ¹	14942,803801	131354,01794
S ⁰	6958,3200225	87580,350142

A Tabela 2 mostra os custos de ajuste dos modelos calculados de ordens 5, 7 e 9, segundo o critério em (25) para as metodologias mencionadas. Conforme pode ser observado, os melhores resultados foram alcançados pelas metodologias 5, 6 e 7-CGO. O Método de Levy, embora bastante referenciado, apresenta um erro bem maior que os dos demais métodos. Os métodos 4 e 7 não conseguiram gerar modelos para $n = 9$.

A Figura 1 mostra os pontos fornecidos da respostas em frequência $G_f(j\omega)$ da FT utilizada, bem como as respostas em frequência dos modelos calculados de ordem 5 para o método 7-CGO e ordem 7 para o método 3.

Tabela 2 – Custos de ajuste dos modelos

Metodologi	Ordem (n)		
	5	7	9
2	2,48940 9	2,17231 2	2,36266 1
3	2,28122	2,00784	2,17574

	7	3	0
4	0,02744 8	0,01494 7	-
5	0,00226 9	0,00113 9	0,00247 8
6	0,00204 1	0,00108 6	0,00219 1
7 – BL	1,75381 3	1,55786 1	1,41583 8
7 - CGO	0,00030 8	0,00030 8	-

Conclusões

Neste trabalho foram apresentadas diversas metodologias para obtenção de modelos a partir de um conjunto fornecido de pontos de resposta em frequência. Para exemplos de baixa ordem (até $n = 5$), todos os métodos apresentaram bons resultados. A medida que os dados de resposta em frequência são gerados a partir de modelos com ordens mais elevadas, verifica-se uma degradação no custo de ajuste, principalmente no Método de Levy. Nesses casos, os métodos apresentam uma maior gama de valores de ajuste.

Com relação ao tempo de processamento, os métodos 2, 3, 5, 6 e 7-BL são extremamente rápidos, pois suas soluções são calculadas analiticamente. Os métodos 4 e 7-CGO são numéricos, porém o método 4 produz soluções em tempos comparáveis aos métodos analíticos acima. Embora o método 7-CGO tenha produzido os melhores resultados, de acordo com a Tabela 2, seu tempo de processamento computacional é bem mais elevado que os dos demais. Em todos os métodos, a ordem do modelo pode ser previamente arbitrada. Contudo, apenas nos métodos 4 e 7-CGO consegue-se utilizar as soluções calculadas com ordens inferiores para obtenção de soluções com ordens mais elevadas, garantindo que o custo de ajuste

seja menor ou igual ao alcançado anteriormente.

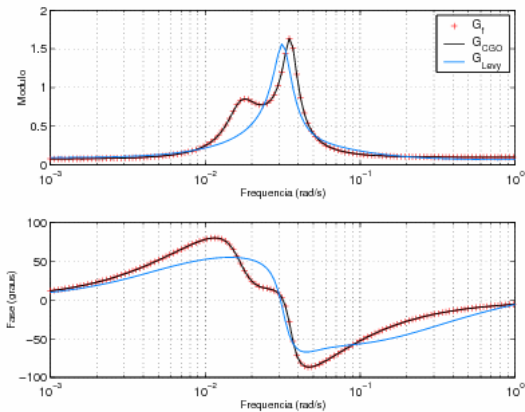


Figura 1 – Resposta em frequência de G_{CGO}^5 , G_{Levy}^7 e dos pontos fornecidos $G_f(j\omega)$.

Referências

[1] Ades, R. e Valle, R.C., (2005). Identificação de Sistemas por Conjuntos Pré-selecionados via Imposição de Pólos, VII SBAI/ II IEEE LARS págs:727-732, Set 2005.

[2] Ades, R. e Wulhynek, S.P. e Sousa, J.V.M., (2004). Identificação de Sistemas no Domínio da Frequência utilizando Conjuntos Geradores Otimizados, CBA-Congresso Brasileiro de Automática, 2004.

[3] Aguirre, L. A. (2000). Introdução à Identificação de Sistemas, Editora UFMG, Belo Horizonte.

[4] Akçay, H. e Heuberger, P. (2001). A frequency-domain iterative identification algorithm using general orthonormal basis functions, Automatica (37): 663-674.

[5] Akçay, H., Islam, S. M. e Ninness, B., (1998). Identification of power transformer models from frequency

response data: A case study, Signal Processing (68): 307--315.

[6] Araújo, L. O. (2006). Identificação e Controle de algumas classes de sistemas não-estacionários, Tese de Mestrado, Instituto Militar de Engenharia.

[7] Bayard, D. S. (1994). High-order multivariable transfer function curve fitting: Algorithms, sparse matrix methods and experimental results., Automatica (30): 1439--1444.

[8] Bazaara, S. e Shetty, (1993). Nonlinear Programming Theory and Algorithms, 2 edn, John Wiley and Sons.

[9] Friedman, J.H. e Khargonekar, P.P. (1995). Application in h_∞ to lightly damped systems: Two case studies, IEEE Transactions on Control Systems Technology (3):279--289.

[10] Gu, G., Khargonekar, P.P. e Li, Y. (1992). Robust convergence of two-stage nonlinear algorithms for identification in h_∞ , Systems and control Letters (18): 253--263.

[11] Levy, A. C. (1959). Complex-Curve Fitting, IEEE Transactions on Automatic Control AC(4): 37--43.

[12] Medina, E. A., Irwin, R.D., Mitchell, J.R. e Bukley, A. (1994). MIMO system identification using frequency response data, The Journal of the Astronautical Sciences (1): 113--129.

[13] Ninness, B. (1996). Frequency domain estimation using orthonormal bases, Proceedings of 13th IFAC World Congress, San Francisco, USA.

[14] Pintelon, R., Guillaume, P., Rolain, Y., Schoukens, J. e Van Hamme, H. (1994). Parametric identification of transfer functions in frequency domain - a survey, *IEEE Transactions on Automatic Control* (11): 2245--2260.

[15] Pintelon, R., Schoukens, J. e Vandersteen, G. (1997). Frequency domain system identification using arbitrary signals, *IEEE Transactions on Automatic Control* (12): 1717--1720.

[16] Sanathanan, C. K. e Koerner, J. (1963). Transfer function synthesis as a ratio of two complex polynomials, *IEEE Transactions on Automatic Control* AC(8): 56--58.