DETERMINAÇÃO DE ROTA ÓTIMA DE UM CAMINHÃO DE COLETA DE RESÍDUOS PARA UM BAIRRO BASEADO NO PROBLEMA DO CARTEIRO CHINÊS

Bruno Carlos da Silva Sousa
UFF - Escola de Engenharia Industrial Metalúrgica de Volta Redonda
Av. dos Trabalhadores, 420, Vila Santa Cecília, 27.255-125, Volta Redonda, RJ,
brunocarloss@hotmail.com

Luís Alberto Duncan Rangel
UFF - Escola de Engenharia Industrial Metalúrgica de Volta Redonda, Professor Adjunto
Av. dos Trabalhadores, 420, Vila Santa Cecília, 27.255-125, Volta Redonda, RJ,
Tel: (24) 3344-3017, Fax: (24) 3344-3019,
duncan@metal.eeimvr.uff.br

Resumo

O presente trabalho adapta o Problema do Carteiro Chinês para um bairro de uma cidade brasileira de médio porte, aplicando-o na otimização de rota para a coleta de resíduos domésticos. Primeiramente, através de revisão bibliográfica são apresentadas algumas definições da Teoria dos Grafos e o Problema do Carteiro Chinês. Após esta introdução apresenta-se a metodologia empregada para um problema real de coleta de resíduos domésticos. O trabalho por fim compara os resultados obtidos através desta metodologia com o de uma rota aleatória, concluindo que as vantagens são significativas e vão além da mera economia de recursos.

Palavras-chave: Problema do Carteiro Chinês, Coleta de Resíduos, Rota Ótima.

1. INTRODUÇÃO

O planejamento de rotas boas é essencial no atual momento competitivo com necessidade de cortes de custos e satisfação total do cliente. Uma rota ótima, quando criada, proporciona à empresa uma operação de forma mais eficiente e eficaz, uma vez que está sendo criado um plano de roteamento ótimo e tendo um maior aproveitamento dos recursos disponíveis.

A otimização de rotas na logística gera para a empresa um considerado ganho com a redução do custo de transporte e principalmente uma melhoria significativa na satisfação do cliente que irá desfrutar de um nível de serviço mais elevado, e poderá ser aplicado nos mais diversos contextos práticos, tais como entrega de correspondência, roteamento de ônibus, coleta de lixos domésticos. Exemplos de aplicações nesta área são observados em Colin-Cipparrone-Shimizu(1999), em Cunha (2000) e em Paes (2004)

Uma empresa de coleta de resíduos residenciais precisa elaborar um método operacional que satisfaça as necessidades da população, mas que também respeite o limite de custos suportado pela empresa. Os carros de coleta de resíduos residenciais devem ser distribuídos ao longo da cidade e ao longo da semana de forma que nenhuma região deixe de ser atendida por um espaço de tempo muito longo. Algumas regiões se mostram mais importantes do que outras sejam porque produzem maiores quantidades de lixo ou porque têm maiores valores urbanísticos, e estas precisam ser priorizadas. Eventos constantes como feiras também podem influenciar bastante na dinâmica da coleta de lixo.

Todos os fatores supracitados devem ser considerados, mas num primeiro momento esta pesquisa tem como foco a determinação da rota ótima para um caminhão de coleta de resíduos residenciais para uma pequena região de um bairro da cidade de Volta Redonda. Desta forma, esta pesquisa busca determinar como o caminhão responsável pela coleta de resíduos residenciais se desloca por uma região pré-determinada. Tornar esse deslocamento de tempo o mínimo possível é o objetivo desse trabalho, e como principal ferramenta, será utilizada o problema do carteiro chinês. Assim, a partir desta pesquisa um estudo futuro para todo o bairro será realizado e comparado com uma situação real.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O problema de roteamento surgiu com o problema das pontes de Konigsberg no século XVIII, onde discutia-se a da existência de um caminho que percorresse sete pontes de uma cidade pertencente à Alemanha, passando apenas uma única vez por cada uma delas. Nesse período, o famoso matemático suíço Euler, em 1736, encontrou condições para a existência de um caminho fechado e mostrou que não existe tal caminho neste caso específico. Esta descoberta de Euler foi um dos marcos iniciais da teoria dos grafos (Arenales *et al.* 2007), teoria esta que será a base teórica para o entendimento do problema do carteiro chinês, sendo apresentado a seguir.

2.1 GRAFO

Grafo é um conceito abstrato utilizado para representar a idéia de relação entre objetos e é definido por Larson & Odoni (1981) como uma estrutura G(M,A) que consiste de um conjunto finto de N nós (ou vértices) e de um conjunto finito de A arcos (ou arestas) que conectam pares de nó onde $(i,j) \in A$, onde $i \in N$ e $j \in N$. Assim, um grafo é representado por um círculo com rótulo i, e cada aresta (i,j) por uma linha que conectando os dois círculos rotulados de i e j (Arenales *et al.*, 2007). Quando os pares dos vértices não possuem uma ordem, ou seja, (i,j) é semanticamente igual a (j,i) tem-se um grafo não orientado. Quando os sentidos das ligações são considerados, tem-se um grafo orientado.

Outras definições importantes, descrito por Godinho & Junqueira (2006) é a de caminho, como sendo uma seqüência de arcos adjacentes e nós; e circuito como sendo um caminho cujos nós iniciais e finais se coincidem. Um circuito (ou ciclo) será chamado euleriano, quando passa por todos os arcos de um grafo uma única vez. Obter o menor circuito possível passando por todos os arcos de um circuito constitui o Problema do Carteiro Chinês (PCC) desenvolvido por Guan em 1962 e será a ferramenta utilizada neste estudo.

2.2 O Problema do Carteiro Chinês para redes não orientadas

O método de solução para grafos formados por circuitos euleriano é trivial. Um dos algoritmos tratados é o algoritmo que consiste em percorrer todos os arcos, partindo de um vértice qualquer, apagando cada arco percorrido e nunca percorrendo um arco que divida o grafo em dois grafos conexos separados.

Todavia, muitos problemas trabalham com grafos não eulerianos, ou seja, formado por vértices de grau impar, principalmente na solução de problemas maiores. Neste caso, há necessidade de duplicação dos arcos de grau impar, criando os chamados arcos artificiais, tornando o grafo anterior em um grafo euleriano. Foi utilizado um algoritmo para o tratamento desse tipo de problema, onde emprega-se o algoritmo 1.

Algoritmo 1: Encontrar circuito Euleriano em grafo inicialmente não Euleriano.

Passo 1: Identificar os *m* nós de grau ímpar de G(N,A). O valor de *m* é sempre par;

Passo 2: Encontre o "casamento de pares com a mínima distância", chamado na literatura de *minimun-lenght pairwise matching*) desses *m* nós e identifique os *m/2* caminhos mínimos deste "casamento" ótimo;

Passo 3: Adicione estes *m/2* caminhos mínimos como arcos ligando os nós do "casamento" ótimo. O novo grafo G'(N,A') contém zero nós de grau ímpar;

Passo 4: Encontre um circuito Euleriano em G'(N,A').

Este circuito é a solução ótima do PCC no grafo original G(N,A) e o seu comprimento é igual ao comprimento total dos arcos em A, mais o comprimento total dos m/2 caminhos mínimos.

Para a determinação do casamento de arcos, utilizar-se-á um modelo de programação linear assim especificado, denominado aqui por Problema de Programação Linear 1 (PPL1) (Hillier & Lieberman, 2004).

O PPL 1, apresentado na equação 1, determina um grafo euleriano para redes não orientadas.

$$
\begin{aligned}
& Min \sum_{(i,j)\in A} l_{ij} x_{ij} \\
& S.A.: \\
& \sum_{j:(i,j)\in A} x_{ij} = \sum_{j:(j,i)\in A} x_{ji}, \forall i \qquad (1) \\
& x_{ij} + x_{ji} \geq \; 1 \;\; \forall (i,j) \in A \\
& x_{ij} \text{ int } \forall (i,j) \in A
\end{aligned}
$$

onde: l_{ij} representa o custo do arco *ij* e X_{ij} representa o arco *ij*.

2.3 O Problema do Carteiro Chinês para redes orientadas

Nos Grafos orientados existe uma condição que não existia no modelo anterior, que deve ser satisfeita, deve existir um caminho orientado entre qualquer dois vértices do Grafo, ou seja, ele deve ser fortemente conectado.

Como nos grafos não orientados, aqui também o primeiro passo é verificar se o grafo orientado tratado é formado por um circuito euleriano. Nesse caso, todos os nós, que representam os vértices, possuem número de graus de entrada iguais ao grau de saída.

Assim, como no primeiro caso, basta partir de um vértice qualquer e percorrer todas as arestas orientadas, uma a uma, não formando ciclos, até chegar ao nó de origem.

Da mesma forma, a maioria dos problemas que tratam o Problema do Carteiro Chinês para grafos orientados, é formada por grafos não eulerianos, assim sendo há necessidade de criação de arcos artificiais para a transformação do mesmo em um grafo euleriano.

Baker (1983) propôs um modelo, descrito em programação inteira, que cria as arestas artificiais mais econômicas, denominado aqui por Problema de Programação Linear 2 [PPL2].

O PPL 2, apresentado na equação 2, determina um grafo euleriano para redes orientadas.

$$
\begin{aligned}
& Min \sum_{(i,j)\in A} l_{ij} x_{ij} \\
& S.A.: \\
& \sum_{j:(i,j)\in A} x_{ij} = \sum_{j:(j,i)\in A} x_{ji}, \forall i \qquad (2) \\
& x_{ij} \geq \ 1 \ \ \forall (i,j) \in A \\
& x_{ij} \ \mathrm{int} \, \forall (i,j) \in A
\end{aligned}
$$

onde: l_{ij} representa o custo do arco *ij* e X_{ij} representa o arco *ij*.

Uma vez determinado o grafo euleriano, basta escolher um vértice qualquer, como vértice de origem e, percorrer por todo o grafo até chegar ao nó de origem, formando o caminho euleriano minimizador.

2.4 Problema do Carteiro Chinês para redes mistas

Uma rede mista é aquela formada tanto por redes orientadas quanto por redes não orientadas. Se esta rede possui todas as arestas com grau par, ou seja, se este grafo for um grafo euleriano, o caminho minimizador é o próprio caminho euleriano.

Todavia, quando a rede possuir arestas de grau impar, assim como nos casos apresentados anteriormente, há a necessidade de criação de arcos artificiais e assim criação de um grafo euleriano a partir do primeiro. Uma vez criado este arcos, novamente, o caminho euleriano é traçado e a rota ótima que passa por todas as arestas ao menos uma vez e retorna ao vértice de origem é criada.

Para a duplicação dos arcos utilizar-se-á um modelo em programação inteira sugerido por Ahuja *et al.* (1993), que separa o grafo em dois conjuntos de arestas, o conjunto formado por arestas não orientadas (A’) e o conjunto formado por arestas orientadas (A), denominado aqui por Problema de Programação Matemática 3.

O PPL3, apresentado na equação 3, determinação de um grafo euleriano para redes mistas.

$$Min \sum_{(i,j)\in A} l_{ij}x_{ij} + \sum_{(i,j)\in A'} l_{ij}x_{ij}$$

$$S.A.:$$

$$\sum_{j:(i,j)\in A'} x_{ij} + \sum_{j:(i,j)\in A} x_{ij} = \sum_{j:(j,i)\in A'} x_{ji} + \sum_{j:(j,i)\in A} x_{ji}, \forall i, \qquad (3)$$

$$x_{ij} + x_{ji} \geq 1, \forall (i,j)\in A'$$

$$x_{ij} \geq 1, \forall (i,j)\in A$$

$$x_{ij} \text{ int } \forall (i,j)\in A$$

$$x_{ij} \text{ int } \forall (i,j)\in A'$$

onde: l_{ij} representa o custo do arco *ij* e X_{ij} representa o arco *ij.*

3. APLICAÇÃO

Hoje em dia a busca por processos otimizados estão sendo pesquisados por grandes empresas em diversos ramos. Estas empresas buscam reduzir os custos e desta forma aumentam os seus lucros. Na área que está sendo pesquisada, rota ótima para a coleta de resíduos residenciais, não é diferente. Esta pesquisa selecionou uma região de um bairro da cidade de Volta Redonda e busca-se determinar rotina eficiente e eficaz de um caminhão de coleta de resíduos residenciais. O problema de determinar uma rota ótima está presente em diversas atividades rotineiras que são executas diariamente em nossas cidades.

As rotas percorridas pelos caminhões de coleta de resíduos residenciais não são, na maioria dos casos, a rota de custo mínimo para a empresa. Uma vez criada a rota mais rápida, haverá para a empresa como principal vantagem, a economia no consumo de combustível e para a sociedade, um possível processo de recolhimento de lixo mais rápido, menor consumo de combustível.

A finalidade desta pesquisa é identificar o traçado de rotas ótimas para a coleta de resíduos residenciais da cidade de Volta Redonda em todos os bairros. Inicialmente, para estudo e assimilação desta metodologia, selecionou-se uma pequena região de um bairro da cidade de Volta Redonda e aplicou-se esta metodologia. Com esta finalidade foi necessário identificar as ruas desta região, as distâncias destas ruas a ser percorrido por um caminhão de coleta de resíduos residenciais, identificar se essas ruas são de mão dupla ou não, de modo a fornecer ao modelo matemático todas as condições reais desta região selecionada.

A figura 1 abaixo apresenta a região selecionada para este estudo de caso. Esta figura foi editada a partir do mapa obtido do Google Earth (2008). Os dados necessários para a implementação dos problemas de programação linear, também foram obtidos a partir deste mapa.

A região selecionada do bairro é formada por ruas de mão única (representado no gráfico por setas) e ruas de mão dupla, ou seja, o grafo criado é formado tanto por arestas orientadas quanto por não orientadas, o que faz-se trabalhar com um problema típico do carteiro chinês para redes mistas. O grafo, então, é formado por 10 vértices e 13 arestas, sendo que as únicas arestas orientadas são: JI e IH. Portanto, apenas estas compõem o conjunto A (conjunto das arestas orientadas como mencionado no problema de programação linear 3) e as demais 11 arestas compõem o conjunto A’(conjunto das arestas não direcionadas).

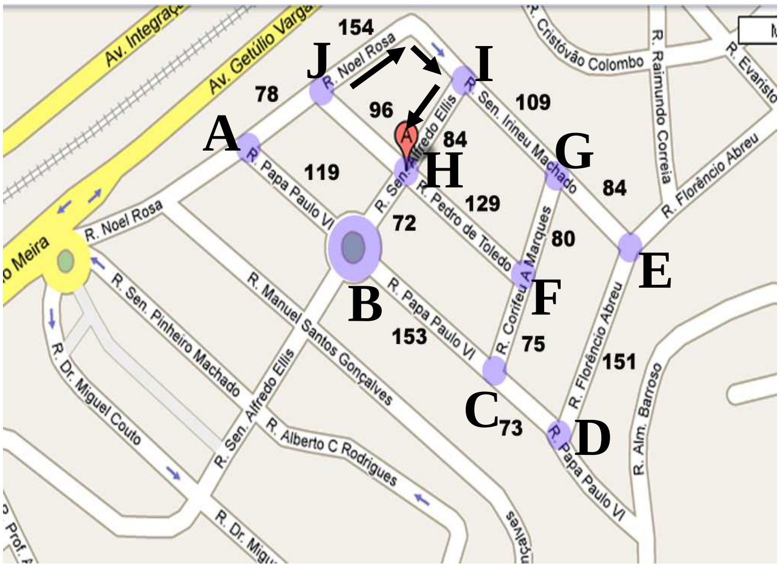


Figura 1 – Mapa da região escolhida para estudo de caso.
Fonte: Google Earth - novembro 2008

Foi desenvolvido um modelo matemático em programação inteira a partir do PPL3 (3) e implementado pelo software LINDO (2008), onde foi considerado; um caminhão de lixo que parta de um vértice qualquer entre os 10 vértices, e retorne ao vértice de partida. Este modelo matemático é apresentado através do PPL4, na equação (4).

$$\begin{aligned}
\text{MIN} \quad Z = {} & 119X_{ab} + 119X_{ba} + 153X_{bc} + 153X_{cb} + 73X_{cd} + 73X_{dc} + 151X_{de} + 151X_{ed} + 84X_{eg} + 84X_{ge} + 80X_{fg} \\
& + 80X_{gf} + 75X_{fc} + 75X_{cf} + 129X_{fh} + 129X_{hf} + 109X_{gi} + 109X_{ig} + 72X_{bh} + 72X_{hb} + 84X_{ih} + 96X_{hj} \\
& + 96X_{jh} + 78X_{aj} + 78X_{ja} + 154X_{ji}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{ST} \qquad & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (4) \\
& X_{ab} + X_{aj} - X_{ba} - X_{ja} = 0 \\
& X_{ba} + X_{bh} + X_{bc} - X_{ab} - X_{hb} - X_{cb} = 0 \\
& X_{cb} + X_{cf} + X_{cd} - X_{bc} - X_{fc} - X_{dc} = 0 \\
& X_{dc} + X_{de} - X_{cd} - X_{ed} = 0 \\
& X_{ed} + X_{eg} - X_{de} - X_{ge} = 0 \\
& X_{fc} + X_{fg} + X_{fh} - X_{cf} - X_{gf} - X_{hf} = 0 \\
& X_{ge} + X_{gf} + X_{gi} - X_{eg} - X_{fg} - X_{ig} = 0 \\
& X_{hb} + X_{hf} + X_{hj} - X_{bh} - X_{fh} - X_{ih} - X_{jh} = 0 \\
& X_{ig} + X_{ih} - X_{ji} - X_{gi} = 0 \\
& X_{ja} + X_{jh} + X_{ji} - X_{aj} - X_{hj} = 0 \\
& X_{ab} + X_{ba} >= 1 \\
& X_{bc} + X_{cb} >= 1 \\
& X_{cd} + X_{dc} >= 1 \\
& X_{de} + X_{ed} >= 1 \\
& X_{eg} + X_{ge} >= 1 \\
& X_{gf} + X_{fg} >= 1
\end{aligned}$$

$X_{cf} + Xf_c >= 1$
$X_{fh} + X_{hf} >= 1$
$X_{ig} + X_{gi} >= 1$
$X_{bh} + X_{hb} >= 1$
$X_{ih} >= 1$
$X_{hj} + X_{jh} >= 1$
$X_{ji} >= 1$
$X_{aj} + X_{ja} >= 1$
X_{ij} inteiro para todas as variáveis deste problema

Como forma de entendimento do modelo, para o PPL4 (4) acima, no termo $73X_{dc,}$ 73 representa o custo do arco dc, ou seja, a distância em metros entre os vértices “c” e “d”. X_{dc} é uma variável de decisão do modelo e irá indicar quantas vezes será percorrido o arco cd, isto é, quantas vezes o caminhão irá passar pela rua que liga os pontos “c” e “d”. A função objetivo visa minimizar a distância total percorrida, ou seja, ela irá fornecer a rota ótima na qual o caminhão de coleta de resíduos residenciais irá percorrer.

As restrições são obtidas de forma a garantir que o somatório das arestas que entrem em um nó seja igual ao somatório das arestas que saem deste nó. Também faz-se necessário garantir que toda aresta seja percorrida ao menos uma vez e por fim garantir que todas as variáveis sejam inteiras.

4. AVALIAÇÃO DOS RESULTADOS

Este modelo matemático foi implementado através do *software* LINDO (2008). Como resultado, ele apresenta todas as arestas que receberam duplicação artificial, ou seja, mostra as arestas que serão percorridas mais de uma vez. Assim, os valores das variáveis determinadas pelo modelo são.

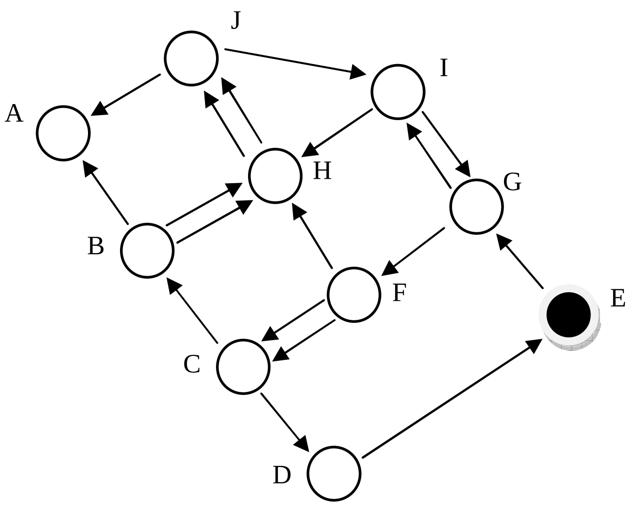
X_{ab}=1, X_{cb}=1, X_{cd}=1, X_{de}=1, X_{eg}=1, X_{gf}=1, X_{fc}=2, X_{hf}=1, X_{ig}=1, X_{gi}=1, X_{ih}=1, X_{bh}=2, X_{hj}=2, X_{ja}=1, X_{ji}=1,

O valor da variável X_{ij} mostra o quanto essa variável é percorrida. Assim, a implementação do modelo mostra que a rota ótima que minimiza a distância total percorrida pelo caminhão é aquela, que a exemplo, tem a aresta “ab” percorrida uma única vez e a aresta “bh” percorrida duas vezes. As demais variáveis do modelo, que certamente são das arestas não orientadas, receberam valor zero, o que quer dizer que aquela aresta foi percorrida em apenas um sentido.

O valor ótimo da função objetivo Z é igual a 1.809 metros, ou seja, o percurso total do caminhão de lixo que atravesse todas as ruas tem um caminho percorrido mínimo total de 1.809 metros.

Uma vez obtidos os valores das arestas que serão percorridas, obtém-se uma duplicação dos vértices de grau impar, e assim, o método de solução se torna trivial. Basta partir de um vértice qualquer possível, geralmente o vértice de partida do caminhão de coleta de lixo, e percorrer todos os arcos X_{ij}, apagando cada arco percorrido, nunca atravessando aquele que divida o grafo em dois grafos separados.

A rota ótima obtida para o caminhão é representado na figura 2, considerando o vértice E como o ponto de partida do veículo.



Seqüência: E – G – I – H – J – I – G – F – C – B – H – J – A – B – H – F – C – D - E
Figura 2: Rota ótima para o caminhão

Como meio de comparação, considerou-se uma rota não ótima, porém viável ao motorista do caminhão de coleta de resíduos residenciais. Nela, outras arestas foram percorridas e arestas aleatórias foram necessariamente duplicadas, visto que não era possível um circuito euleriano pelo bairro, somando assim um percurso total igual a 2.175 metros.

A distância total percorrida pelo caminhão nesta situação é 16,83% maior que a rota ótima determinada pelo modelo matemático. Assim, uma vez empregada a rota ótima, haveria uma economia de 16,83% no percurso e no consumo de diesel desse caminhão.

5. CONCLUSÃO

O presente trabalho consiste em uma aplicação prática do Problema do Carteiro Chinês, da Teoria dos Grafos, onde busca-se encontrar a menor distância percorrida por um caminhão de coleta de resíduos residenciais passando por todas as ruas (arestas) ao menos uma vez e retornando ao ponto de partida.

Foram apresentadas três maneiras diferentes de trabalhar com redes baseadas na orientação das arestas. As redes mistas (formada por arestas orientadas e não orientadas) foram utilizadas para otimizar a rota de um caminhão de coleta de lixo em uma região de um bairro da cidade de Volta Redonda.

O resultado mostrou-se satisfatório, e o projeto de criação de rotas mínimas para os demais bairros não só da cidade de Volta redonda, mas de qualquer região é economicamente viável. Pretende-se determinar, primeiramente, a rota ótima para este bairro e posteriormente para toda a cidade de Volta Redonda continuando desta forma esta pesquisa.

REFERÊNCIA BIBLIOGRAFIA

Arenales, M.; Armentano, V.; Morabito, R.; Yanasse, H.H. *Pesquisa Operacional para Cursos de Engenharia*. Rio de Janeiro: Ed. Elsevier, 2007.

COLIN, E. C. ; CIPPARRONE, F. G. ; SHIMIZU, T. . Otimização do Custo de Transporte na Distribuição-Armazenagem de Açucar. Rev. Produção, Rio de Janeiro, 1999.

CUNHA, C. B. . Aspectos Práticos da Aplicação de Modelos de Roteirização de Veículos a Problemas Reais. Transportes (Rio de Janeiro), Rio de Janeiro (RJ), v. 8, n. 2, p. 51-74, 2000.

GODINHO, M.; JUNQUEIRA, R.A. Problema do Carteiro Chinês: escolha de métodos de solução e análise de tempos computacionais. *Revista Produção*, v.16, n.3, p.538-551, 2006

GOOGLE. Disponível em: http://maps.google.com.br. Acesso em: 11 de agosto de 2008.

GUAN, M. Graphic Programming Using Odd and Even Points. *Chinese Mat*. 1, p. 273-277, 1962.

HILLIER, F.S.; LIEBERMAN, G.J. *Introduction to Operations Research.* 8. ed. New York: Mac-Graw Hill, 2004.

LARSON, R. C. & ODONI, A. R. Urban Operations Research. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1981.

LINDO. LINEAR INTERACTIVE AND DISCRETE OPTIMIZER - LINDO. Ilinois: Systems Inc. de Chicago, 2008. Disponível em: <http://www.lindo.com>. Acesso em: Novembro de 2008.

PAES, Frederico Galaxe. OTIMIZAÇÃO DE ROTAS PARA COLETA DO LIXO DOMÉSTICO: UM TRATAMENTO GRASP PARA O PROBLEMA DO CARTEIRO CHINÊS MISTO (PCCM), 2004.