

# Apreçamento de Opções através do Modelo de árvore Trinomial Implícita: Aplicação no Mercado Acionário Brasileiro

**Paulo Roberto Lima Dias Filho**  
plima82@globo.com  
IAG/PUC-Rio

**Luciana Lima**  
lucianasouli@yahoo.com.br  
IAG/PUC-Rio

**Antonio Carlos Figueiredo Pinto**  
figueiredo@iag.puc-rio.br  
IAG/PUC-Rio

**Marcelo Cabús Klötzle**  
klotzle@iag.puc-rio.br  
IAG/PUC-Rio

**Vinicius Mothé Maia**  
viniciusmothemaia@yahoo.com.br  
IAG/PUC-Rio

**Resumo:** Tendo em vista outros estudos terem demonstrado a robustez da volatilidade implícita como estimador da volatilidade futura de determinada opção até o vencimento. O presente estudo procurou comparar o desempenho do modelo Black-Scholes, amplamente estudado no Brasil e mundo afora, com o modelo da Árvore Trinomial Implícita, pouco explorado pelas pesquisas nacionais. Nesse diapasão, buscou-se analisar as vantagens e desvantagens do modelo e sua aplicação ao mercado acionário brasileiro. Os resultados sugerem que para se obter preços teóricos próximos aos valores de mercado, é necessário um cálculo preciso do skew.

**Palavras Chave:** Apreçamento - Opções - Árvore Trinomial - Volatilidade - Implícita

## 1. INTRODUÇÃO

O modelo de Black&Scholes (1973) e o de árvore binomial proposto por Cox, Ross e Rubinstein (1979) são os mais utilizados pelo mercado, por sua simplicidade e fácil utilização, não obstante ser reconhecido que estes modelos têm limitações.

Os agentes que negociam opções baseados em uma análise de volatilidade constante enfrentam o risco adicional de ter que gerenciar sua exposição baseados em um modelo que não reflete as condições encontradas no mercado, dado que ambos assumem que a volatilidade é constante, independente do prazo de vencimento e do preço de exercício do ativo-objeto.

O sorriso da volatilidade e sua estrutura a termo são as limitações mais reconhecidas como determinantes para a não convergência entre o preço teórico e o de mercado. De acordo com Derman, Kani e Chriss (1996), em mercados onde há um significativo ou persistente sorriso da volatilidade, modelos de árvore trinomial implícita podem assegurar maior consistência na estimação do preço teórico das opções.

A árvore trinomial implícita (ATI) fornece maior liberdade de escolha dos preços subjacentes dos nós da árvore nos espaços de estado e deixa somente a probabilidade de transição ser restrita pelos preços de mercado. Esta liberdade dos espaços de estado fornece uma flexibilidade que pode ser vantajosa para ajustar a árvore ao sorriso da volatilidade. Não obstante a relevância do tema, a literatura sobre este assunto é escassa no Brasil e não foram encontrados artigos acerca deste tema aplicado ao mercado de opções brasileiro.

O artigo, sem contar essa introdução, está organizado da seguinte forma. No primeiro capítulo é feita uma revisão da literatura. No segundo é apresentada a metodologia, descrevendo a coleta de dados e seu tratamento. Em seguida, são apresentados os resultados e por último são expostas as conclusões alcançadas.

## 2. REFERENCIAL TEÓRICO

De acordo com Black e Scholes (1973) o prêmio de uma opção de compra ou venda europeia é função do preço do ativo objeto, do preço de exercício, do tempo até o exercício, da taxa de juros livre de risco e da volatilidade do ativo-objeto até o exercício, como exposto na fórmula:

$$\frac{dSt}{St} = \mu dt + \sigma dWt \quad (1)$$

Onde  $St$  é o preço do ativo no tempo  $t$ ,  $\mu$  o retorno médio esperado,  $\sigma$  a volatilidade, e  $Wt$  representa o processo de Wiener com distribuição normal padronizada.

O modelo Black-Scholes (B-S) assume, entre outras premissas, que o ativo tem uma distribuição lognormal com volatilidade constante até o vencimento, e não há custo de transação e possibilidade para arbitragem.

O método de B-S é a ferramenta mais utilizada pelos operadores para auxiliar na decisão de compra ou venda de uma opção, entre outras razões, por ser um modelo simples e bem testado pelo mercado, por possuir um menor número de parâmetros para estimação em relação a modelos mais complexos que acabam apresentando defasagem de atualização e por nenhum outro modelo de apreçamento de opções ter conseguido explicar por completo as anomalias apresentadas pela volatilidade.

Dentre os demais modelos propostos, o modelo de árvore binomial proposto por Cox, Ross e Rubinstein (CRR) (1979) também é amplamente empregado no cálculo do valor das opções, principalmente as americanas, onde o processo estocástico para o preço da ação

objeto em tempo e estado contínuo, proposto por Black e Scholes, foi aproximado por um processo de tempo e estado discreto.

O modelo de árvore binomial de CRR consiste em um conjunto de nós, representando preços futuros da ação, com um espaço logarítmico constante entre esses nós. Este espaço é a medida de volatilidade de preço futuro da ação, assumindo que a volatilidade é constante.

O modelo assume que movimentos de preços da ação sejam compostos por um grande número de pequenos movimentos binomiais. Em um mundo de risco-neutro, as probabilidades de transição entre os nós dependem da taxa de juros livre de risco e da volatilidade. A ideia central é dividir a vida da opção em pequenos intervalos de tempo discreto,  $\Delta t$ . A cada intervalo de tempo, o preço da ação sai de seu valor inicial  $S$ , tendo probabilidade  $p$  de aumentar de valor,  $S_u$ , e probabilidade  $1 - p$  de diminuir de valor,  $S_d$ .

O valor no vencimento de uma opção de compra será dado por  $\max(S_T - X, 0)$ , onde  $S_T$  é o preço do ativo objeto em  $T$  e  $X$  o preço de exercício. Com base na suposição de tratar-se de um mundo neutro ao risco, o valor de cada nó pode ser calculado como o valor esperado no instante  $T$  descontado à taxa livre de risco  $r$  para um período de tempo  $\Delta t$  considerando a probabilidade correspondente. O processo é repetido até que se chegue ao instante zero e obtenha-se o preço da opção.

Não obstante, devem-se considerar as limitações dos modelos. Os agentes que negociam opções baseados em um modelo de volatilidade constante acabam por enfrentar um risco adicional, dado que suas premissas não se sustentam na prática. Com o intuito de contornar esses desvios, operadores utilizam matrizes de volatilidade que mostram a relação da volatilidade implícita com o preço de exercício e prazo de vencimento das opções (HULL, 2006).

No que diz respeito aos desvios, o sorriso e a estrutura a termo da volatilidade são os mais reconhecidos como determinantes para a dispersão entre o preço teórico e o de mercado da opção. O comportamento da volatilidade implícita ao longo do tempo até o exercício é conhecido como estrutura a termo da volatilidade e o comportamento através do preço de exercício é chamado de sorriso de volatilidade (DUPIRE, 1994; RUBINSTEIN, 1994).

## 2.1. VOLATILIDADE IMPLÍCITA

Rubinstein (1994) demonstra que a volatilidade implícita apresenta diferentes valores para diferentes preços de exercício ao longo do tempo. A denominação sorriso de volatilidade deve-se ao formato da curva de volatilidade implícita em função do preço de exercício, que varia de acordo com o ativo-objeto da opção.

Hull (2006) afirma que a volatilidade diminui quando o preço de exercício aumenta nas opções de ações, como se observa na figura 1. Uma das possíveis razões de ocorrência do sorriso da volatilidade seria o grau de alavancagem da empresa, que poderia torná-la mais arriscada de acordo com sua estrutura de capital e em ocasiões de alta volatilidade no mercado.

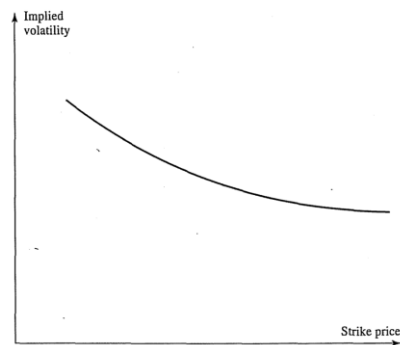


Figura 1 - Sorriso da volatilidade em opções de ações

Fonte: Hull (2006)

Ao se comparar uma distribuição lognormal com uma distribuição implícita de mesma média e desvio padrão, observa-se que a implícita tem uma cauda mais pesada para esquerda e menos robusta à direita em relação à distribuição lognormal, como demonstrado na figura 2 (HULL, 2006).

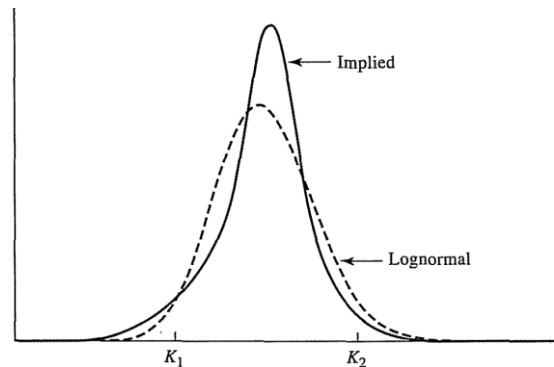


Figura 2 – Distribuição lognormal e distribuição implícita para opções

Fonte: Hull (2006)

Sendo assim, uma opção de compra muito fora do dinheiro com preço de exercício  $K_2$  tem um preço menor quando a distribuição implícita é utilizada ao invés da distribuição lognormal. Isto ocorre porque a opção só será exercida se o preço do ativo-objeto for maior que  $K_2$ . A probabilidade de isso ocorrer é menor na distribuição implícita do que na lognormal, como foi observado na figura anterior. Logo, a distribuição implícita fornece um preço mais baixo para a opção do que se fosse calculado pela lognormal e este preço mais baixo conduz a uma volatilidade implícita menor. O oposto ocorreria para uma opção de venda muito fora do dinheiro.

Hull (2006) argumenta que a volatilidade utilizada para precificar uma opção no dinheiro depende do prazo de vencimento da opção. A curva da volatilidade tende a ser crescente em relação ao vencimento quando a volatilidade de curto prazo é historicamente baixa, uma vez que há então expectativas que a volatilidade aumente. De maneira similar, a curva da volatilidade tende a ser negativa em relação ao vencimento quando a volatilidade de curto prazo é historicamente alta, visto que há expectativas que a volatilidade diminua.

Christensen e Prabhala (1998) e Jorion (1995) demonstram que mesmo em cenários mais dinâmicos, o estimador que utiliza a volatilidade implícita é mais eficiente para prever a volatilidade até o vencimento de uma determinada opção. A principal premissa por trás desses estudos é a de que se o mercado é eficiente, então a volatilidade implícita deve ser um melhor

previsor da volatilidade futura e deve agrupar as informações contidas em todas as outras variáveis e informações no mercado que explicam a volatilidade futura.

Diversas metodologias foram apresentadas para estimar a previsão da volatilidade implícita. Uma vantagem dos modelos de volatilidade implícita é que permitem construir a superfície de volatilidade. Os resultados de Beckers (1981) e Gemmill (1986) demonstram que o estimador da volatilidade implícita deve ser a volatilidade da opção com maior vega, ou seja, a opção mais no dinheiro.

Modelos mais complexos assumem que a volatilidade local não é constante, mas sim que varia de acordo com o preço do ativo subjacente e o vencimento da opção  $\sigma(S,T)$ .

Uma generalização do modelo de Black e Scholes pode ser obtida ao substituir a equação (1) pela seguinte:

$$\frac{dSt}{St} = \mu dt + \sigma(S,T)dWt \quad (2)$$

Segundo Yoshino (2001), na prática, os operadores de mercado fazem um truque ao usar a fórmula de Black e Scholes. Eles sabem que a volatilidade não é constante, podendo mudar com o vencimento e o preço de exercício. Os operadores, então, avaliam as opções dentro do dinheiro e fora do dinheiro em comparação a no dinheiro e, dessa forma, constroem a superfície de volatilidade, que é representada por uma função que relaciona a volatilidade implícita às seguintes variáveis: a) *moneyness* (preço de exercício da opção dividido pelo preço à vista do ativo); e b) tempo restante até o vencimento  $t$ .

## 2.2. ÁRVORE BINOMIAL IMPLÍCITA

Derman e Kani (1994) mostram que é possível determinar  $\sigma(S,T)$  diretamente dos preços observados das opções no mercado a partir do sorriso da volatilidade. Essa modelagem permite que em momentos de crise, quando há diminuição nos preços das ações e aumento da volatilidade, seja possível reduzir a disparidade entre o preço teórico e o de mercado das opções, dado que a volatilidade implícita representa o risco esperado pelo mercado.

A abordagem desenvolvida por Derman e Kani (1994) introduz em cada nó da árvore binomial um preço observado da opção de modo que possa determinar o caminho para o próximo período. Esse caminho é caracterizado pela probabilidade de transição, isto é, a volatilidade local entre nós consecutivos. Os autores usam essa volatilidade  $\sigma(S, t)$  para construir uma árvore binomial implícita (ABI) para opções europeias, que é uma representação natural de uma probabilidade de distribuição discreta não lognormal dos preços subjacentes.

Em geral, pode-se utilizar, em vez de uma ABI, qualquer árvore multinomial, de ordem superior, para a discretização do processo. No entanto, como um lapso de tempo a cada passo tende à zero, estas convergem para o mesmo processo contínuo (HULL e WHITE, 1990). Deste modo, a ABI está entre as árvores multinomias implícitas, no sentido de que tem apenas um grau de liberdade - a escolha arbitrária do nó central em cada nível da árvore.

Embora se acredite que a árvore binomial seja suficiente, árvores de ordem superior poderiam ser mais úteis, pois permitem uma discretização mais flexível no sentido de que as probabilidades de transição e de distribuições podem variar tão bem quanto possível. Isto é especialmente importante quando os preços das opções de mercado são imprecisos devido a atritos de mercado ineficientes.



Yoshino (2001) utilizou o modelo da árvore binomial implícita como um dos métodos para estimar a função densidade de probabilidade na medida risco-neutro do Índice da Bolsa de Valores de São Paulo (IBOVESPA), com intuito de verificar como o processo de difusão difere na prática da volatilidade constante que é assumida no modelo B-S. Sua principal conclusão é que os modelos que consideram a volatilidade implícita melhoram as medidas de risco do mercado acionário juntamente com a estimativa da volatilidade histórica.

Derman e Kani (1994) buscaram estimar a curva de sorriso da volatilidade para o mercado americano antes da crise asiática, mas não obtiveram êxito em seu estudo. Derman, Kani e Chriss (1996) reconhecem o problema apontado e propõem a utilização da árvore trinomial recombinante como uma possível solução.

### 2.3. ÁRVORE TRINOMIAL IMPLÍCITA

De acordo com Derman, Kani e Chriss (1996), em mercados de opções onde há um significativo ou persistente sorriso da volatilidade, modelos de árvore trinomial implícita podem assegurar maior consistência na estimação do preço teórico das opções em relação ao do mercado.

Uma árvore trinomial com N níveis é um conjunto de nós  $S_{n,i}$ , onde  $n$  é o número de nível e  $i$  os nós fixados dentro de um nível. Em determinado nó,  $S_{n,i}$ , poderá mudar para um dos três nós: (i) para o nó superior com valor  $S_{n+1,i}$  com probabilidade  $p_i$ , (ii) para o nó inferior com valor  $S_{n+1,i+2}$  com probabilidade  $q_i$ , e (iii) para o nó no meio com valor  $S_{n+1,i+1}$  com probabilidade  $1 - p_i - q_i$ , como ilustrado na figura 3.

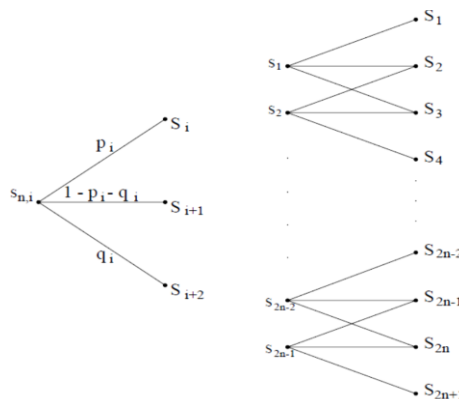


Figura 3 - Nós em uma árvore trinomial

Fonte: Čížek e Komorád, 2005

A partir de um nó  $S_{n,i}$  no tempo  $t_n$ , há cinco parâmetros desconhecidos: duas probabilidades de transição ( $p_i$  e  $q_i$ ) e três preços ( $S_i$ ,  $S_{i+1}$  e  $S_{i+2}$ ). Para determiná-los, precisa-se introduzir a notação e os principais requisitos que a árvore deve satisfazer. Os preços de  $S$  são derivados da binomial por Čížek e Komorád (2005) para construir uma árvore trinomial padrão:

$$S_i = S_{n+1,i} = S_{n,i} e^{\sigma\sqrt{2\Delta t}}, \quad (3)$$

$$S_{i+1} = S_{n+1,i+1} = S_{n,i}, \quad (4)$$

$$S_{i+2} = S_{n+1,i+2} = S_{n,i} e^{-\sigma\sqrt{2\Delta t}} \quad (5)$$

Os preços subjacentes são ajustados ao sorriso da volatilidade, adicionando a variável  $c$ , que é uma constante, para considerar a volatilidade local. Derman, Kani e Chriss (1996)

argumentam que tendo em vista a existência de  $2n$  equações para  $2n+1$  parâmetros desconhecidos, uma equação adicional é necessária e supõem que o novo nó central é igual ao original:  $\tilde{S}_{n+1} = S_{n+1}$ :

$$\frac{\tilde{S}_k}{\tilde{S}_{k-1}} = \exp \left\{ \frac{c}{\sigma(S_k)} \ln \frac{S_k}{S_{k-1}} \right\}, k = 2, \dots, 2n + 1, \quad (6)$$

Enquanto  $F_i$  denota o preço futuro conhecido do preço do ativo-objeto  $S_{n,i}$ ,  $\lambda_{n,i}$  é o preço Arrow-Debreu conhecido no nó  $(n, i)$ . De acordo com Čížek e Komorád (2005), os preços de Arrow-Debreu para uma árvore trinomial podem ser obtidos através da fórmula:

$$\lambda_{1,1} = 1, \quad (7)$$

$$\lambda_{1,1} = e^{-r\Delta t} \lambda_{n,1} p_1, \quad (8)$$

$$\lambda_{n+1,2} = e^{-r\Delta t} \{ \lambda_{n,1} (1 - p_1 - q_1) + \lambda_{n,2} p_2 \}, \quad (9)$$

$$\lambda_{n+1,i+1} = e^{-r\Delta t} \{ \lambda_{n,i-1} q_{i-1} + \lambda_{n,i} (1 - p_1 - q_1) + \lambda_{n,i+1} p_{i+1} \}, \quad (10)$$

$$\lambda_{n+1,2n} = e^{-r\Delta t} \{ \lambda_{n,2n-1} (1 - p_{2n-1} - q_{2n-1}) + \lambda_{n,2n-2} q_{2n-2} \}, \quad (11)$$

$$\lambda_{n+1,2n+1} = e^{-r\Delta t} \lambda_{n,2n-1} q_{2n-1}. \quad (12)$$

O preço Arrow-Debreu é utilizado na derivação do cálculo da árvore trinomial. Seja  $(n, i)$  o nó  $i$ th (mais alto) no nível de tempo  $n$ th de uma árvore. O preço Arrow-Debreu  $\lambda_{n,i}$  do nó  $(n, i)$  de uma árvore é calculado como a soma do produto das probabilidades de transição de risco-neutro descontadas passando por todos os caminhos desde a raiz da árvore até o nó  $(n, i)$ . Assim, o preço de Arrow-Debreu da raiz da árvore é igual a um e os preços Arrow-Debreu do nível final de uma árvore formam uma aproximação discreta da densidade do preço de estado.

Deste modo, os preços estão com desconto, e logo, a probabilidade de risco-neutro correspondente a cada nó (no nível final) deve ser calculado como o produto do preço de Arrow-Debreu e do fator de capitalização  $e^{rT}$ .

A árvore trinomial implícita se baseia na volatilidade constante da árvore trinomial padrão para construir sua volatilidade implícita. Ela assume que a volatilidade, a princípio constante, varia em pontos percentuais de acordo com o aumento ou queda do preço do exercício em função de mudança do preço do ativo subjacente da opção, ou seja, o modelo ajusta ao sorriso da volatilidade. O cálculo das volatilidades locais implícitas, segundo Čížek e Komorád (2005), é aproximado à equação:

$$\sigma_i^2 \approx \frac{p_i (S_i - F_i)^2 + (1 - p_i - q_i) (S_{i+1} - F_i)^2 + q_i (S_{i+2} - F_i)^2}{F_i^2 \Delta t} \quad (13)$$

Quando a volatilidade implícita varia apenas lentamente com exercício e vencimento, o espaço de estado regular com uma malha uniforme, é adequado para a construção de um modelo de ATI. Por outro lado, se a volatilidade varia significativamente com o preço de exercício ou o prazo de vencimento, deve-se escolher um espaço de estado refletindo essas propriedades. Supondo-se que a volatilidade é separável no tempo e no preço das ações,  $\sigma(S, t) = \sigma(S) \sigma(t)$ , o espaço de estado de uma ATI com a inclinação ajustada ao sorriso e a estrutura a termo adequados pode ser construído em quatro etapas.

Primeiro, constrói-se uma rede regular trinomial com um espaço de tempo  $\Delta t$  constante e um espaço de preços  $\Delta S$  constante, como observado na figura 4(a). Além disso, assume-se que todas as taxas de juros e dividendos são iguais à zero.

A seguir, modifica o  $\Delta t$  em diferentes pontos de tempo e em seguida altera o  $\Delta S$  em diferentes níveis (ver DERMAN, KANI E CHRISSE, 1996), assumindo o formato da figura 4(b). Finalmente, verifica a necessidade de ajuste dos preços nos nós para não violar a restrição do preço futuro.

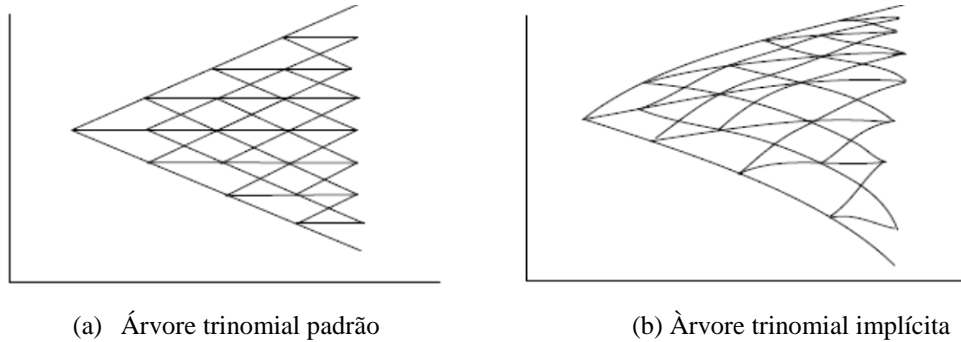


Figura 4 - Espaços de estado

Fonte: Derman, Kani e Chriss, 1996

Uma vez que o espaço de estado de uma ATI é fixado, podem-se calcular as probabilidades de transição para todos os nós  $(n, i)$  em cada nível da árvore  $n$ . Seja  $C(K, t_n+1)$  e  $P(K, t_n+1)$  o preço atual de uma opção padrão europeia de compra e venda, respectivamente, exercida a  $K$  e vencimento  $t_{n+1}$ . Estes valores podem ser obtidos pela interpolação da superfície do sorriso em vários pontos do preço de exercício e vencimento:

$$C(K, t_{n+1}) = e^{-r\Delta t} \sum_j \{p_j \lambda_{n,j} + (1 - p_{j-1} - q_{j-1}) \lambda_{n,j-1} + q_{j-2} \lambda_{n,j-2}\} (S_j K)^+, \quad (14)$$

$$P(K, t_{n+1}) = e^{-r\Delta t} \sum_j \{p_j \lambda_{n,j} (1 - p_{j-1} q_{j-1}) \lambda_{n,j-1} q_{j-2} \lambda_{n,j-2}\} (K S_j)^+. \quad (15)$$

Os valores dessas opções determinados pela árvore trinomial são as estimativas descontadas das funções de ganho de valor ao exercer a opção:  $\max(S_j - K, 0) = (S_j - K)^+$  para a opção de compra e  $\max(K - S_j, 0)$  para a opção de venda no nó  $(n + 1, j)$ . A estimativa é tomada em relação às probabilidades de alcançar cada nó, isto é, em relação às probabilidades de transição.

Para definir o preço de exercício  $K$  para  $S_{i+1}$  é necessário rearranjar os termos da soma da fórmula de  $C$  e usar a equação de  $F_i$  para calcular as probabilidades de transição  $p_i$  e  $q_i$  para todos os nós acima do nó central de uma opção de compra europeia:

$$p_i = \frac{e^{r\Delta t} C(S_{i+1}, t_{n+1}) - \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_{n+1,j} (F_j - S_{i+1})}{\lambda_{n+1,i} (S_i - S_{i+1})}, \quad (16)$$

$$q_i = \frac{F_i - p_i (S_i - S_{i+1}) - S_{i+1}}{S_{i+2} - S_{i+1}}. \quad (17)$$

Similarmente, o cálculo para as probabilidades de transição  $p_i$  e  $q_i$  para todos os nós abaixo do nó central, válido inclusive para ele, de uma opção de venda europeia é:

$$q_i = \frac{e^{r\Delta t} P(S_{i+1}, t_{n+1}) - \sum_{j=i+1}^{2n-1} \lambda_{n+1,j} (S_{i+1} - F_j)}{\lambda_{n+1,i} (S_i - S_{i+1})}, \quad (18)$$

$$p_i = \frac{F_i - q_i (S_{i+2} - S_{i+1}) - S_{i+1}}{S_i - S_{i+1}}. \quad (19)$$



Segundo Čížek e Komorád (2005), uma árvore implícita fornece uma representação discreta do processo de evolução dos preços subjacentes. Para capturar e modelar o preço subjacente corretamente é necessário que uma árvore implícita: reproduza corretamente o sorriso da volatilidade, seja neutra ao risco e tenha probabilidades de transição dentro do intervalo (0, 1).

Para cumprir a condição de neutralidade ao risco, o valor esperado do preço subjacente  $S_{n+1, i}$  no período de tempo seguinte  $t_{n+1}$  tem que igualar seu preço futuro conhecido pela fórmula:

$$Es_{n+1,i} = p_i S_i + (1 - p_i - q_i) S_{i+1} + q_i S_{i+2} = F_i = e^{r\Delta t} S_{n,1}, \quad (20)$$

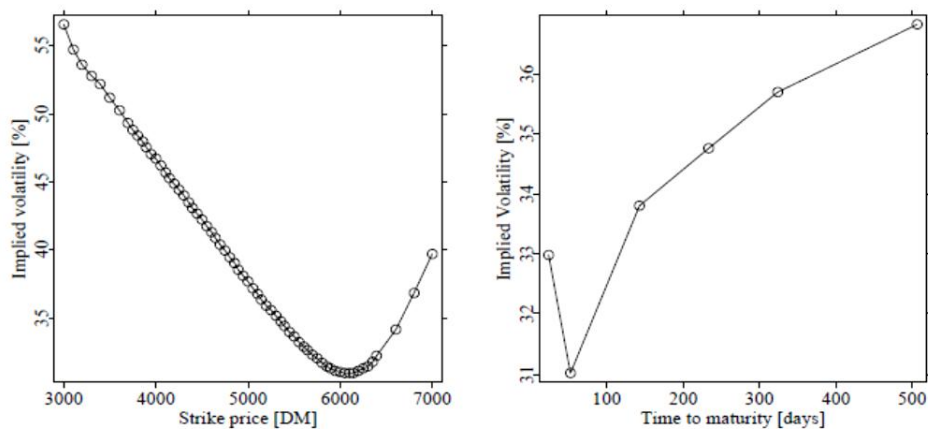
Onde  $r$  denota a taxa de juros contínua e  $\Delta t$  é o passo do tempo  $t_n$  até  $t_{n+1}$ . Adicionalmente, pode-se especificar tal condição também para os momentos seguintes de  $S_{n,i}$  e  $F_i$ . Assim, obtém-se uma segunda restrição sobre os preços nos nós e probabilidades de transição.

$$p_i (S_i - F_i)^2 + (1 - p_i - q_i)(S_{i+1} - F_i)^2 + q_i (S_{i+2} - F_i)^2 = F_i^2 \sigma_i^2 \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t), \quad (21)$$

Logo, há duas restrições para cinco parâmetros desconhecidos e, portanto, não há nenhuma árvore trinomial implícita única. Por outro lado, todas as árvores que correspondem a essas restrições são equivalentes no sentido de que, como o espaço de tempo  $\Delta t$  tende a zero, todas essas árvores convergem para o mesmo processo contínuo. Um método comum para a construção de uma ATI é escolher primeiro livremente os preços subjacentes e, em seguida, resolver as equações acima para encontrar as probabilidades de transição  $p_i$  e  $q_i$ . Contudo, deve-se garantir que essas probabilidades não violem a condição de ter probabilidade entre 0 e 1.

A princípio, a utilização de uma ATI em vez de uma ABI fornece graus de liberdade adicionais. Isso permite a possibilidade de melhorar o ajuste do sorriso da volatilidade, especialmente quando os preços das opções praticadas no mercado estiverem inconsistentes ou com arbitragem tornando impossível construir uma árvore consistente. No entanto, mesmo que a árvore construída seja consistente, outras dificuldades podem surgir quando sua volatilidade local e probabilidade de transição são irregulares ou implausíveis.

Čížek e Komorád (2005) utilizaram os preços de exercício das opções do índice de ações alemão - *DAX*, com vencimento a partir de duas semanas e dois meses de 4 de janeiro de 1999 para construir e calibrar a árvore trinomial implícita a fim de ajustá-la ao sorriso da volatilidade. Para tanto calcularam primeiro a volatilidade implícita, ilustrado na figura 5, extraída da equação de B-S com combinações variadas de preço e vencimento, obtendo assim o sorriso da volatilidade. Os autores construíram uma ATI com três níveis de tempo com  $\Delta t =$  duas semanas.



(a) Sorriso da volatilidade

(b) Estrutura a termo da volatilidade

Figura 5 - Volatilidade implícita de opções de venda da DAX em 29/01/1999

Fonte: Čížek e Komorád, 2005

Algumas probabilidades de transição ficaram fora do intervalo (0,1), como destacado pelas linhas tracejadas na figura 6, porém foram corrigidas conforme orientações do modelo. Em relação ao preço futuro, não houve violação à restrição. De fato confirmou-se que as volatilidades implícitas variam de um nó para outro e reflete o sorriso da volatilidade, conforme pode ser observado pela ligeira inclinação dos espaços de estado na figura 7.

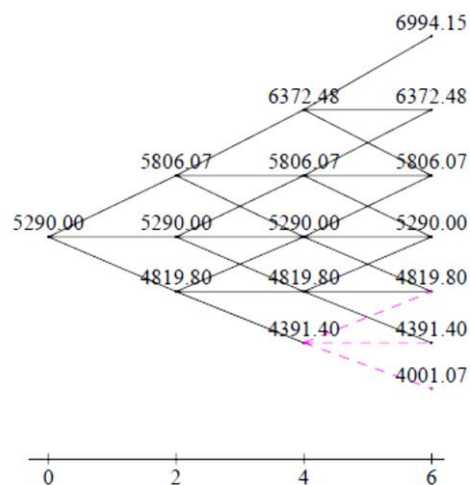


Figura 6 - Espaços de estado de uma ATI calculada para opções da DAX em 04/01/1999

Fonte: Čížek e Komorád, 2005

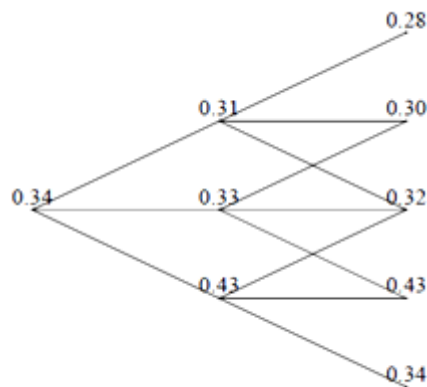


Figura 7 - Volatilidade implícita local estimada pela ATI para DAX em 4/01/1999

Fonte: Čížek e Komorád, 2005

O principal resultado deste modelo ATI pode ser resumido pela densidade dos preços da amostra. Esta densidade descreve a distribuição dos preços dada pela construção da ATI e suavizada pelo estimador *Nadaraya-Watson*.

A densidade estimada é bastante áspera, pois são usadas apenas três etapas na árvore em questão. Para obter uma estimativa suave da densidade do preço de estado, dobra-se o número de passos, ou seja, utilizam-se seis etapas de uma semana em vez de três etapas de duas semanas. A densidade de preço estimada pela ATI em relação à projetada pelo modelo de B-S mostrou-se menos enviesada quando calculou a árvore considerando seis níveis em vez de três, como demonstrado na figura 8 e 9.

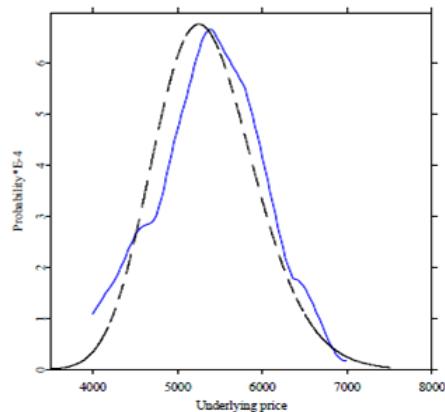


Figura 8 - Densidade do preço estimado com três níveis

Nota: a linha tracejada representa a densidade calculada pelo B-S e a contínua pela ATI

Fonte: Čížek e Komorád, 2005

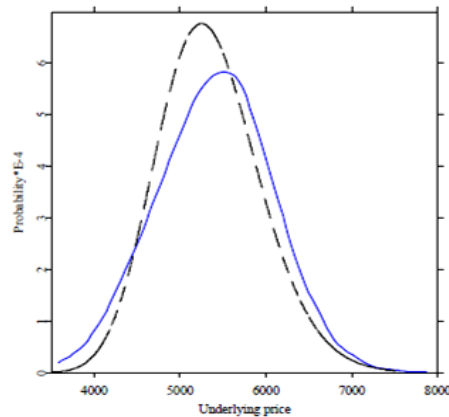


Figura 9 - Densidade do preço estimado com seis níveis

Nota: a linha tracejada representa a densidade calculada pelo B-S e a contínua pela ATI

Fonte: Čížek e Komorád, 2005

### 3. METODOLOGIA

Com o intuito de analisar o comportamento da Árvore Trinomial Implícita, optou-se por se utilizar os dados das duas empresas com capital aberto com maior liquidez no mercado brasileiro, a Petrobrás e a Vale. Delimitou que seriam analisadas as opções de compra negociadas as segundas-feiras entre janeiro e dezembro de 2011 que estivessem mais perto do vencimento, desde que o vencimento não fosse na segunda-feira em questão. Caso não houvesse pregão na segunda-feira em virtude de algum feriado, seria utilizado o próximo dia com pregão.

Definidos o conjunto de dias analisados, foi necessário definir quais opções de compra seriam estudadas. Optou-se por se trabalhar com três opções de cada empresa em cada dia, sendo uma no dinheiro, uma fora do dinheiro e uma dentro do dinheiro. A regra de decisão da escolha das opções fora e dentro do dinheiro foi a liquidez, avaliado pelo maior número de negociações.

Foram então coletados junto a BM&FBovespa os dados das opções definidas anteriormente, assim como a curva de juros livre de risco (DI) e o histórico dos preços das ações da Petrobrás e Vale.

De posse dos dados, foi necessário parametrizar as variáveis a serem empregadas na Árvore Trinomial Implícita (ATI), assim como no modelo de Black-Scholes (BS) que funcionou como base para se avaliar o desempenho do modelo em estudo.

Calculou-se o logaritmo neperiano da taxa livre de risco anual compatível com o vencimento da opção para *input* em ambos os modelos. Em seguida, se calculou o desvio-padrão a partir do logaritmo neperiano do retorno dos 21 dias de pregão anteriores ao dia da análise. Converteu-se esse desvio-padrão diário em anual. Pode-se então calcular o preço teórico da opção dado pelo modelo BS, sendo estes preços comparados posteriormente aos obtidos pela ATI.

Para que fosse possível calcular o preço teórico da opção pela ATI era necessário, além dos dados já obtidos, calcular o valor do *skew*. Calculou-se então a volatilidade implícita com a planilha DG201\_functions.xls do Derivagem, disponibilizada por Hull (2006).

Uma vez calculada a volatilidade implícita para as três opções, calculou-se, sobre a curva gerada pelos três pontos, o *skew* de cada uma delas. Para aquelas que se assemelhavam a um *smirk*, o *skew* foi o coeficiente angular da regressão linear das curvas.

Entretanto, essa mesma metodologia não pode ser empregada para aquelas que se assemelhavam a um "sorriso". Nesse caso, calculou-se o *skew* dos valores fora e no dinheiro e no dinheiro e dentro do dinheiro, sendo utilizado o primeiro *skew* para as opções fora e no dinheiro e o segundo *skew* para a opção dentro do dinheiro. Pode-se então prosseguir para o cálculo do preço teórico da opção de compra através da ATI.

Realizou-se, então, uma análise de sensibilidade entre os modelos (BS e ATI), com o intuito de verificar o impacto de cada variável no apreçamento da opção e com isso avaliar a aderência dos modelos. Os valores bases dessa análise foram:

- Opção de compra europeia;
- $S = 90$ ;
- $K = 100$ ;
- $T = 2$  anos;
- $r = 0,10$ ;
- $\sigma = 0,15$ ;
- $c = 0,05$ .

Por último, realizou-se no SPSS o teste não paramétrico de Wilcoxon, de forma a verificar estatisticamente se os preços teóricos das opções obtidos com o BS diferiam dos obtidos com a ATI.

#### 4. RESULTADOS

Primeiramente comparou-se a diferença entre o preço teórico da opção calculada pela ATI e BS. Essa análise foi separada em três grupos para cada empresa, um com as opções dentro do dinheiro, outro no dinheiro e por último fora do dinheiro.

Segue a tabela com os resultados apurados para a Petrobrás e a Vale respectivamente:

Tabela 1 - Diferença entre o modelo BS e o ATI para as opções da Petrobrás

|                               | Dentro do dinheiro | No dinheiro    | Fora do dinheiro |
|-------------------------------|--------------------|----------------|------------------|
| <b>Diferença Absoluta</b>     | 0,005202179        | 0,00100502     | -0,005731818     |
| <b>Diferença Relativa (%)</b> | 0,24778737236%     | -2,3337261764% | -27,08173261687% |
| <b>Desvio-padrão</b>          | 0,006512055        | 0,015071673    | 0,007327483      |
| <b>Desvio-padrão (%)</b>      | 0,37955769%        | 7,44945871%    | 29,7462029%      |

Tabela 2 - Diferença entre o modelo BS e o ATI para as opções da Vale

|                               | Dentro do dinheiro | No dinheiro     | Fora do dinheiro |
|-------------------------------|--------------------|-----------------|------------------|
| <b>Diferença Absoluta</b>     | 0,011655856        | 0,001930518     | -0,013430093     |
| <b>Diferença Relativa (%)</b> | 0,40462392879%     | -0,29888670326% | -9,80087850155%  |
| <b>Desvio-padrão</b>          | 0,01130703         | 0,009135815     | 0,019058033      |
| <b>Desvio-padrão (%)</b>      | 0,40595621%        | 2,29346893%     | 15,81965424%     |

Os resultados expostos apontam para uma maior diferença entre os modelos nas opções fora do dinheiro. Além de verificar que os modelos tendem a convergir para preços próximos nas opções dentro do dinheiro. De maneira geral o apreçamento via ATI teve valores de prêmios menores que o BS, com diferença máxima de 72%. Esses resultados estão de acordo com o esperado, considerando o que foi discutido na subseção 2.1, acerca da distribuição lognormal e da implícita.

Após essa primeira análise das diferenças entre os valores teóricos, seguiu-se a análise de sensibilidade das variáveis envolvidas.



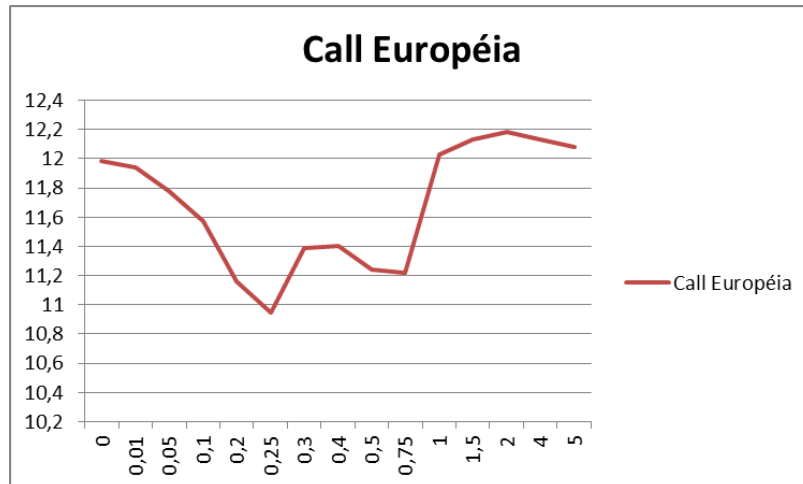


Figura 10 - Preço da opção de compra em função do valor do *skew*

Nota-se que é relevante se trabalhar com um valor de *skew* em uma faixa limitada de valores, do contrário, ocorrerá uma instabilidade no preço e o modelo não irá aderir adequadamente à realidade.

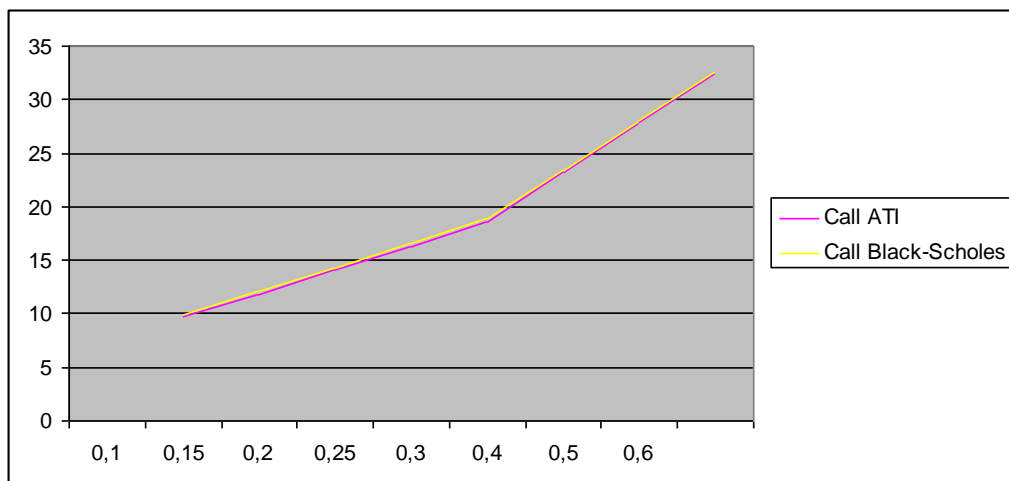


Figura 11 - Preço da opção de compra (Y) em função da volatilidade (X)

Percebe-se que a variação na volatilidade impacta, de maneira semelhante, ambos os modelos de apreçamento, sem haver um descolamento de um deles.

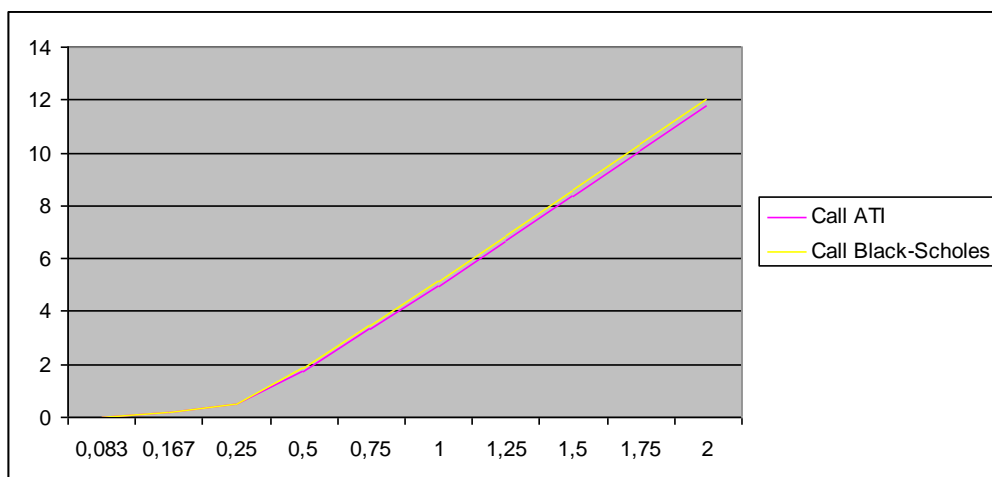


Figura 12 - Preço da opção de compra em função do tempo até o exercício da opção

Constata-se que o tempo até o exercício da opção leva, no longo prazo, a um descolamento entre os dois modelos, evidenciando assim que os modelos divergem caso o exercício não se encontre no curto prazo.

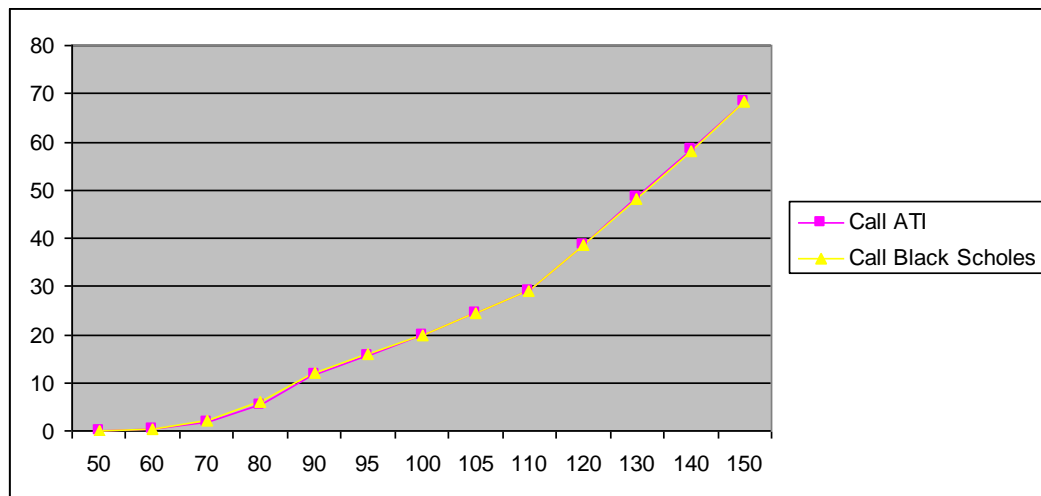


Figura 13 - Preço da opção de compra em função do preço da ação

Assim como no caso da variação da volatilidade, a diferença entre os modelos é pequena, não ocorrendo um descolamento entre as curvas.

Por último, segue abaixo o p-valor obtido a partir do teste não paramétrico de Wilcoxon. Para ambas as empresas, os resultados apontam para, do ponto de vista estatístico, não há diferença entre os prêmios calculados pelo método da ATI e do BS ao nível de significância de 0,05.

Tabela 3 - P-valor do teste não paramétrico de Wilcoxon

|                  | P-valor |
|------------------|---------|
| <b>Petrobrás</b> | 0,45    |
| <b>Vale</b>      | 0,271   |

## 5. CONCLUSÕES

Verificou-se para as ações da Petrobrás, que a diferença dos preços teóricos das opções entre os métodos de apreçamento é mínima no caso de opções dentro do dinheiro, sendo essa diferença crescente conforme se avança as opções fora do dinheiro. Já a diferença visualizada para as ações da Vale, apesar de seguir de maneira geral o descrito para a Petrobrás, houve casos que a diferença no dinheiro foi menor que a dentro do dinheiro.

Em relação ao sinal dessa diferença, para ambas as empresas, as opções dentro do dinheiro calculadas pela ATI obtiveram valores superiores ao do modelo BS, sendo o comportamento oposto verificado nas opções fora do dinheiro. Porém as opções no dinheiro não seguiram um padrão, ocorrendo valores superiores e inferiores da ATI em relação ao BS. É interessante destacar que a diferença entre os modelos no apreçamento das opções da Vale é inferior aos valores obtidos para a Petrobrás.

Outro ponto relevante a ser destacado é o *skew*, visto que sua mensuração adequada influencia a aderência do modelo a realidade. Notaram-se valores superiores de *skew* para a Petrobrás em relação a Vale, além disso, a curva da volatilidade implícita da Vale se aproximava com frequência de um *smirk*, enquanto a da Petrobrás se assemelhava a um "sorriso".

Deve-se levar em conta também a influência, na análise de sensibilidade, do tempo até o exercício. Pois esta variável se mostrou mais relevante que as demais, na perspectiva que quanto maior for o tempo até o vencimento maior será a diferença entre o preço teórico da ATI e do BS.

Contatou-se, através do teste de Wilcoxon, que o método da ATI não alterou de forma significativa o valor do prêmio da opção em comparação ao modelo BS.

Por fim, destaca-se que para se obter valores de prêmio da opção mais próximos aos observados no mercado, é fundamental construir uma curva de volatilidade implícita capaz de refletir o comportamento do ativo. De forma a alcançar uma curva de volatilidade implícita próxima da realidade através do cálculo do *skew* mais preciso.

## 6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Beckers, Stan. Standard Deviations Implied in Option Prices as Predictors of Future Stock Price Variability. **Journal of Banking and Finance**, vol, 5, no. 3 (September), p. 363-382, 1981.
- Black, F., Scholes, M. The pricing of options and corporate liabilities. **Journal of Political Economy**, v. 81, p. 637-659, 1973.
- Čížek, Pavel. Kamorád, Karel. **Implied Trinomial Trees**. Department of Econometrics and Operations Research, Universiteit van Tilburg, The Netherlands, Komerční Banka, Praha, Czech Republic, 2007.
- Cox, J., Ross, S., Rubinstein, M. Option pricing: a simplified approach. **Journal of Financial Economics**, v. 7, p. 229-263, 1979.
- Christensen, B. J.; Prabhala, N. R. The relation between implied and realized volatility. **Journal of Financial Economics**, 50, 1998, p.125-150
- Derman, E., Kani, I. Reading on the smile. **Risk**, v. 7, p. 32-39, 1994.
- Derman, E., Kani, I., Chriss, N. Implied trinomial trees of the volatility smile. In: SACHS, G. **Quantitative Strategies Research Notes**, 1996.
- Dupire, B. Pricing with a smile. *Risk*, v. 7, p. 18-20, 1994.
- Gemmill, Gordon. The Forecasting Performance of Stock Options on the London Traded Options Market. **Journal of Business Finance and Accounting**, vol. 13, no. 4, (Winter), p.535- 46, 1986.
- Hull, John. **Options, Futures and Other Derivatives**. 6th Edition. Prentice Hall, 2006.
- Hull, J. and White, A. **Valuing derivative securities using the explicit finite difference method**. The Journal of Finance and Quantitative Analysis 25: 87-100, 1990.
- Jorion, P. Predicting Volatility in the Foreign Exchange Market. **Journal of Finance**, vol. 50, p. 507-528, 1995.
- Rouah, F., Vainberg, G., **Option Pricing Models & Volatility using Excel VBA**, 2007.
- Rubinstein, M. Implied binomial trees. **Journal of Finance**, v. 49, p. 771-818, 1994.
- Yoshino, J.A. Uma Metodologia para a Estimção do Risco no Mercado Acionário Brasileiro: preço Arrow-Debreu, **PPE - Pesquisa e Planejamento Econômico**, Volume 31, no. 1, pp. 125-152, 2001.