28 · 29 · 30 de OUTUBRO
XII SEGeT
Simpósio de Excelência em Gestão e Tecnologia
TEMA 2015
Otimização de Recursos e Desenvolvimento

Gráfico T^2 de Hotelling com esquema especial de amostragem para processos bivariados e autocorrelacionados

Roberto Campos Leoni
rcleoni@yahoo.com.br
AEDB

Resumo: Este artigo propõe o emprego do gráfico de T^2 com a estratégia de amostragem composta para o monitoramento do vetor de médias de processos bivariados com observações autocorrelacionadas. O emprego da estratégia de amostragem composta consiste em reagrupar elementos dos dois últimos subgrupos racionais selecionados do processo. O objetivo principal da técnica proposta é reduzir o efeito negativo da autocorrelação no desempenho do gráfico de controle de T^2. Quando as duas variáveis são autocorrelacionadas, a estratégia de amostragem composta sempre melhora o desempenho do gráfico de T^2, contudo, a estratégia não é recomendada para processos em que apenas uma das variáveis é autocorrelacionada e robusta a presença de causas especiais.

Palavras Chave: Gráfico de controle - T^2 de Hotelling - Autocorrelação - Amostragem - Processos bivariados

1. INTRODUÇÃO

Métodos estatísticos desempenham um papel central no monitoramento da variabilidade de características de qualidade relacionadas a processos de manufatura ou serviços. Na década de 30, Shewhart (1931) lançou as bases para emprego dos gráficos de controle e, ainda naquela época, reconheceu a necessidade de monitorar processos considerando o controle multivariado.

Quando os gráficos de controle foram criados, destinavam-se à indústria de partes discretas e não havia praticamente nenhum grau de automação (COSTA; EPPRECHT; CARPINETTI, 2005; MONTGOMERY, 2009).

Uma das hipóteses básicas para uso de gráficos de controle é a independência entre observações ao longo do tempo. Quando essa hipótese é violada, tem-se um processo com observações autocorrelacionadas. Processos contínuos e por batelada são extremamente frequentes na indústria química e metalúrgica. Tais processos raramente produzem observações independentes (COSTA; EPPRECHT; CARPINETTI, 2005).

A violação da hipótese de independência não se restringe a processos contínuos ou por batelada. Processos discretos altamente automatizados também costumam apresentar observações autocorrelacionadas (COSTA; EPPRECHT; CARPINETTI, 2005).

A hipótese de independência entre as observações de uma variável pode ser violada pelas altas taxas de amostragem empregadas na seleção de elementos que compõem a amostra segundo o instante de fabricação, ou seja, quando as medidas das observações são realizadas em um curto espaço de tempo (KIM; JITPITAKLERT; SUKCHOTRAT, 2010).

Alguns trabalhos sugeriram a adoção de estratégias de amostragem para reduzir o efeito negativo da autocorrelação no desempenho do gráfico de controle de $\bar{X}$.

Costa e Castagliola (2011) empregaram a estratégia de amostragem em que os elementos da amostra são coletados de forma sistemática da linha de produção. Eles mostraram que o efeito da autocorrelação pode ser reduzido selecionando itens não vizinhos de acordo com o instante em que são produzidos.

Franco et al. (2013) introduziram a estratégia de amostragem composta. Nesta estratégia os elementos das amostras são oriundos de dois subgrupos racionais vizinhos. Os resultados comprovaram que a estratégia de amostragem composta é superior a estratégia de amostragem sistemática quando há auto grau de autocorrelação na variável. Recentemente, Franco et al. (2014) também investigaram o projeto econômico-estatístico para o gráfico de $\bar{\mathrm{X}}$ com a estratégia de amostragem sistemática.

Em todos esses trabalhos, as observações das características de qualidade X são descritas por um modelo autoregressivo de primeira ordem AR (1).

Neste artigo, considerou-se o uso do gráfico de T^2 para controle do vetor de médias de processos bivariados cujas observações são representadas pelo modelo multivariado autoregressivo de primeira ordem - VAR (1). Para reduzir o efeito negativo da autocorrelação no desempenho do gráfico de T^2, propomos o emprego da estratégia de amostragem composta.

A próxima seção apresenta o modelo VAR (1) e a matriz de variância-covariância do vetor de médias amostrais quando as amostras são selecionadas de acordo com o princípio de formação de subgrupos racionais. Na seção 3, obteve-se a matriz de variância-covariância do vetor de médias amostrais com a estratégia de amostragem composta. As propriedades estatísticas do gráfico de T^2 e o efeito da autocorrelação no desempenho do gráfico de T^2 são apresentados nas seções 4 e 5. Na seção 6, descreve-se um exemplo ilustrativo e algumas conclusões e considerações finais são apresentadas na seção 7.

2. O MODELO VAR (1) E A MATRIZ DE VARIÂNCIA-COVARIÂNCIA DO VETOR DE MÉDIAS AMOSTRAIS

A hipótese de independência é violada em muitos processos de manufatura. Nesse caso, vetores autoregressivos de primeira ordem – VAR (1) são usados para modelar processos multivariados com correlação temporal entre observações de uma mesma variável e correlação entre observações de diferentes características de qualidade (ARKAT; NIAKI; ABBASI, 2007; BILLER; NELSON, 2003; HUANG; BISGAARD; XU, 2013; HWARNG; WANG, 2010; ISSAM; MOHAMED, 2008; JARRETT; PAN, 2007; KALGONDA; KULKARNI, 2004; KALGONDA, 2012; KIM; JITPITAKLERT; SUKCHOTRAT, 2010; MASTRANGELO; FORREST, 2002; NIAKI; DAVOODI, 2009).

O modelo autoregressivo multivariado de primeira ordem, VAR(1), é dado por:

$$\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{X}_{t-1} - \boldsymbol{\mu}) + \mathbf{e}_\mathbf{t} \tag{1}$$

sendo $\mathbf{X_t} = \left(x_{1t}, ..., x_{pt}\right)^T$ o vetor de dados de ordem px1; $\boldsymbol{\mu}_\mathbf{0} = \left(\mu_{01}, ..., \mu_{0\mathrm{p}}\right)^T$ o vetor de médias de ordem px1, $\boldsymbol{\Phi}$ uma matriz com os parâmetros autoregressivos de ordem pxp e $\mathbf{e_t} = \left(e_{1t}, ..., e_{\mathrm{pt}}\right)^T$ são vetores de erros aleatórios independentes de ordem px1 com distribuição normal multivariada de média zero e matriz de variância-covariância Σ_e.

De acordo com Kalgonda and Kulkarni (2004), a matriz de variância-covariância de $\mathbf{X}_t$ é obtida por:

$$\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Phi}^T + \boldsymbol{\Sigma}_\mathbf{e} \tag{2}$$

Considerou-se neste trabalho o caso particular em que p=2 para estudar o efeito da correlação e da autocorrelação no desempenho do gráfico T^2 de Hotelling. Quando p=2, os elementos de $\boldsymbol{\Phi}$ e Σ_e são representados por:

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{pmatrix} a & c \\ d & b \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_\mathbf{e} = \begin{pmatrix} \sigma_{e_X}^2 & \sigma_{e_{XY}} \\ \sigma_{e_{XY}} & \sigma_{e_Y}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{e_X}^2 & \rho\sigma_{e_X}\sigma_{e_Y} \\ \rho\sigma_{e_X}\sigma_{e_Y} & \sigma_{e_Y}^2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

sendo ρ a correlação entre X e Y.

Quando $\boldsymbol{\Phi} = \mathrm{diag}(a, b)$, segue das equações (2) e (4) a relação:

$$\boldsymbol{\Gamma} = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(1-a^2\right)^{-1}\sigma_{e_X}^2 & \left(1-ab\right)^{-1}\sigma_{e_{XY}} \\ \left(1-ab\right)^{-1}\sigma_{e_{XY}} & \left(1-b^2\right)^{-1}\sigma_{e_Y}^2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Leoni, Machado e Costa (2014) obtiveram a matriz de variância-covariância $\Gamma_{\overline{\mathrm{X}}}$ do vetor de médias amostrais $\overline{\mathrm{X}}$ quando os elementos das amostras são selecionados de acordo com o conceito de subgrupos racionais:

$$\boldsymbol{\Gamma}_{\bar{\mathrm{X}}} = \begin{pmatrix} \zeta_{\mathrm{X}}^2 & \zeta_{\mathrm{XY}} \\ \zeta_{\mathrm{XY}} & \zeta_{\mathrm{Y}}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_{\mathrm{X}}^2}{n}\left[1+\frac{2}{n}\sum_{\mathrm{j}=1}^{n-1}(n-\mathrm{j})a^{j}\right] & \frac{\sigma_{\mathrm{XY}}}{n}\left[1+\frac{1}{n}\sum_{\mathrm{j}=1}^{n-1}(n-\mathrm{j})a^{\mathrm{j}}+\frac{1}{n}\sum_{\mathrm{j}=1}^{n-1}(n-\mathrm{j})b^{\mathrm{j}}\right] \\ \frac{\sigma_{\mathrm{XY}}}{n}\left[1+\frac{1}{n}\sum_{\mathrm{j}=1}^{n-1}(n-\mathrm{j})a^{\mathrm{j}}+\frac{1}{n}\sum_{\mathrm{j}=1}^{n-1}(n-\mathrm{j})b^{j}\right] & \frac{\sigma_{\mathrm{Y}}^2}{n}\left[1+\frac{2}{n}\sum_{\mathrm{j}=1}^{n-1}(n-\mathrm{j})b^{\mathrm{j}}\right] \end{pmatrix} \tag{6}$$

sendo n o tamanho das amostras.

A equação (6) é função de $\boldsymbol{\Phi}$, n e $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{e}}$. Para um processo bivariado, $\Gamma_{\bar{\mathrm{X}}}$ pode ser generalizado por:

$$\boldsymbol{\Gamma}_{\bar{\mathbf{X}}} = \begin{pmatrix} \zeta_{\mathrm{X}}^2 & \zeta_{\mathrm{XY}} \\ \zeta_{\mathrm{XY}} & \zeta_{\mathrm{Y}}^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{n^2}\left\{\left(\sum_{\mathrm{i}=0}^{n-1}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{i}}\right)\boldsymbol{\Gamma}\left(\sum_{\mathrm{i}=0}^{n-1}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{i}}\right)^{T} + \sum_{\mathrm{k}=1}^{n-1}\left[\left(\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{i}-1}\right)\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{e}}\left(\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{i}-1}\right)^{T}\right]\right\} \tag{7}$$

É bem conhecido que a autocorrelação gera um impacto negativo no desempenho do gráfico de controle de $\bar{\mathrm{X}}$; Leoni, Machado e Costa (2014) provaram que a autocorrelação também reduz o poder do gráfico de T^2 na sinalização de causas especiais que atuam no vetor de médias de um processo. A partir de $\Gamma_{\bar{\mathrm{X}}}$ é possível avaliar o real efeito da autocorrelação no desempenho do gráfico de controle de T^2.

3. ESTRATÉGIA DE AMOSTRAGEM COMPOSTA

A estratégia de amostragem composta consiste em selecionar unidades de dois subgrupos racionais consecutivos (FRANCO et al., 2013). Para ilustrar o emprego desta técnica, considere a Figura 1 que apresenta dois subgrupos racionais consecutivos de tamanho 5 (n=5) e a amostra composta. Uma amostra composta i é formada com unidades do subgrupo racional i (primeiro, terceiro e quinto elementos de acordo com o instante em que os elementos são selecionados da linha de produção) e unidades do subgrupo racional anterior *i-1* (segundo e quarto elementos). Os elementos restantes do subgrupo racional corrente, isto é, segundo e quarto elementos, são utilizados para formar a próxima amostra composta *i+1* e assim por diante.

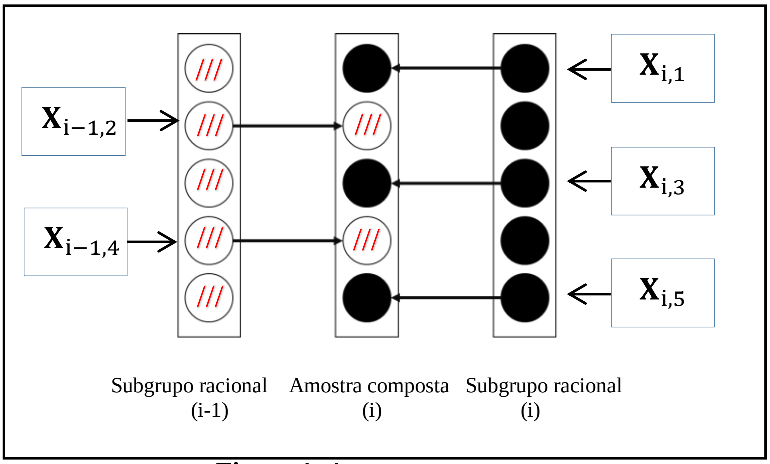


Figura 1: Amostra composta.
Fonte: Adaptado de Franco et al. (2013)

O vetor de médias da amostra composta i é dado por:

$$\bar{\mathbf{M}}_i = \frac{n_{\mathrm{e}}}{n}.\underbrace{\frac{1}{n_{\mathrm{e}}}\sum_{\mathrm{t}=1}^{n_{\mathrm{e}}}\mathbf{X}_{i-1,2\mathrm{t}}}_{\bar{\mathbf{Y}}_{i-1}} + \frac{n_{\mathrm{o}}}{n}.\underbrace{\frac{1}{n_{\mathrm{o}}}\sum_{\mathrm{t}=1}^{n_{\mathrm{o}}}\mathbf{X}_{i,2t-1}}_{\bar{\mathbf{Z}}_i} \tag{8}$$

sendo: $\mathbf{X}_{k,l}$ o *l*-ésima vetor com observações do *k*-ésimo subgrupo racional; $\bar{\mathbf{Y}}_{i-1}$ o vetor de médias das unidades de ordem par selecionadas do subgrupo racional *i-1*, e $\bar{\mathbf{Z}}_i$ o vetor de médias das unidades de ordem ímpar selecionadas do subgrupo racional i. Quando n é par, $n_e = n_o = n/2$, e quando n é ímpar, $n_e = (n-1)/2$ e $n_o = (n+1)/2$.

Admitindo-se que $\bar{\mathbf{Y}}_{i-1}$ e $\bar{\mathbf{Z}}_i$ são independentes, a matriz de variância-covariância $\Gamma_{\bar{M}}$ do vetor de médias da amostra composta $\bar{\mathbf{M}}$ é dada por:

$$\Gamma_{\bar{M}} = \begin{pmatrix} \zeta_X^2 & \zeta_{XY} \\ \zeta_{XY} & \zeta_Y^2 \end{pmatrix} = \left(\frac{n_e}{n}\right)^2 \cdot \Gamma_{\bar{Y}} + \left(\frac{n_o}{n}\right)^2 \cdot \Gamma_{\bar{Z}} \tag{9}$$

sendo $\Gamma_{\bar{Y}}$ e $\Gamma_{\bar{Z}}$ são, respectivamente, a matriz de variância-covariância do vetor de médias das amostras selecionadas do subgrupo racional *i-1* e subgrupo racional *i*. De acordo com o modelo VAR (1):

$$\Gamma_{\bar{Z}} = \frac{1}{n_o^{\,2}}\left\{\left(\sum_{l=0}^{n_o-1}\Phi^{2l}\right)\Gamma\left(\sum_{l=0}^{n_o-1}\Phi^{2l}\right)^T + \sum_{k=1}^{n_o-1}\left\{\sum_{j=1}^{2}\left[\left(\sum_{l=1}^{k}\Phi^{2l-j}\right)\Sigma_e\left(\sum_{l=1}^{k}\Phi^{2l-j}\right)^T\right]\right\}\right\} \tag{10}$$

e

$$\Gamma_{\bar{Y}} = \frac{1}{n_e^2}\left\{\begin{array}{l}\left(\sum_{l=0}^{n_e-1}\Phi^{2l+1}\right)\Gamma\left(\sum_{l=0}^{n_e-1}\Phi^{2l+1}\right)^T + \left(\sum_{l=0}^{n_e-1}\Phi^{2l}\right)\Sigma_e\left(\sum_{l=0}^{n_e-1}\Phi^{2l}\right)^T + \\ \sum_{k=1}^{n_e-1}\left\{\sum_{j=1}^{2}\left[\left(\sum_{l=1}^{k}\Phi^{2l-j}\right)\Sigma_e\left(\sum_{l=1}^{k}\Phi^{2l-j}\right)^T\right]\right\}\end{array}\right\} \tag{11}$$

Para ilustrar como se obtém a matriz $\Gamma_{\bar{M}}$ considere o caso em que n=5, $\mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}$ e $\Sigma_e = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 1 \end{pmatrix}$. De acordo com as expressões (8), (10) e (11):

$$\bar{\mathbf{M}}_i = \frac{2}{5} \times \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{2}\mathbf{X}_{i-1,2t}}_{\bar{\mathbf{Y}}_{i-1}} + \frac{3}{5} \times \underbrace{\frac{1}{3}\sum_{t=1}^{3}\mathbf{X}_{i,2t-1}}_{\bar{\mathbf{Z}}_i}$$

$$\Gamma_{\bar{Y}} = \frac{1}{4}\left[(\Phi + \Phi^3)\Gamma(\Phi + \Phi^3)' + (I + \Phi^2)\Sigma_e(I + \Phi^2)' + \Phi\Sigma_e\Phi' + \Sigma_e\right]$$

$$\Gamma_{\bar{Y}} = \begin{pmatrix} 0{,}5989 & 0{,}3441 \\ 0{,}3441 & 0{,}8333 \end{pmatrix} \text{ e}$$

$$\Gamma_{\bar{Z}} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} (I + \Phi^2 + \Phi^4)\Gamma(I + \Phi^2 + \Phi^4)' + (\Phi + \Phi^3)\Sigma_e(\Phi + \Phi^3)' + \\ + (I + \Phi^2)\Sigma_e(I + \Phi^2)' + \Phi\Sigma_e\Phi' + \Sigma_e \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_{\bar{Z}} = \begin{pmatrix} 0{,}4122 & 0{,}2451 \\ 0{,}2451 & 0{,}6111 \end{pmatrix}$$

Finalmente, com a equação (9):

$$\Gamma_{\bar{M}} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 \Gamma_{\bar{Y}} + \left(\frac{3}{5}\right)^2 \Gamma_{\bar{Z}} = \begin{pmatrix} 0{,}2442 & 0{,}1433 \\ 0{,}1433 & 0{,}3533 \end{pmatrix}$$

A inversa da matriz de variância-covariância $\Gamma_{\bar{M}}$ é utilizada para calcular a estatística de monitoramento do gráfico T^2 de Hotelling.

4. PROPRIEDADES ESTATÍSTICAS DO GRÁFICO T^2 DE HOTELLING COM AMOSTRAS COMPOSTAS

Quando a estratégia de amostras compostas é usada, a estatística de monitoramento do gráfico de T^2 é dada por:

$$T_t^2 = (\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)^T\, \Gamma_{\bar{M}}^{-1}(\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0) \tag{12}$$

sendo $\boldsymbol{\mu_0} = \left(\mu_{0X}, \mu_{0Y}\right)^T$. Se as matrizes $\boldsymbol{\Phi}$ e Σ_e são conhecidas ou estimadas com precisão, a estatística de monitoramento T_t^2 segue uma distribuição *qui*-quadrado com *p*=2 graus de liberdade (χ_p^2). Ocorrendo uma causa especial que modifique o vetor de médias para $\boldsymbol{\mu_1} = \left(\mu_{1X}, \mu_{1Y}\right)^T$, a distribuição de probabilidade da estatística de monitoramento T_t^2 se passa a ser uma distribuição *qui*-quadrado não central $\left(\chi^2_{(p,\lambda)}\right)$ com parâmetro de não centralidade $\lambda^2 = \boldsymbol{\delta}^T\, \Gamma_{\overline{\mathrm{M}}}^{-1}\boldsymbol{\delta}$, em que $\boldsymbol{\delta}$ representa a mudança padronizada no vetor de médias $\boldsymbol{\delta} = (\delta_X, \delta_Y)^T = \left(\frac{\mu_{1X}-\mu_{0X}}{\sigma_{e_X}}, \frac{\mu_{1Y}-\mu_{0Y}}{\sigma_{e_Y}}\right)^T$ (FRANCO; COSTA; MACHADO, 2012; WU; MAKIS, 2008) .

A estatística de eficiência mais usual de um gráfico de controle é o *NMA* - número médio de amostras até o sinal (APLEY; TSUNG, 2002; COSTA; EPPRECHT; CARPINETTI, 2005; HUANG; BISGAARD; XU, 2013; HWARNG; WANG, 2010; JIANG, 2004; PAN; JARRETT, 2011; VANHATALO; KULAHCI, 2014). O NMA é dado por:

$$NMA = \frac{1}{P} \tag{13}$$

sendo $P = \alpha$, se o processo estiver em controle e $P = 1 - \beta$, se o processo estiver fora controle.

O NMA também é denominado $NMAo$ quando $P = \alpha$. Se, por exemplo, $\alpha = 0{,}0027$, tem-se em média, um alarme falso a cada 1/0,0027=370,4 amostras.

Quando o processo está sob a ação de causas especiais, o poder do gráfico de controle está relacionado com o erro tipo II, sendo $P = 1 - \beta$. Nesse caso, o *NMA* representa o número médio de amostras até o sinal de um alarme verdadeiro anunciado pelo gráfico de controle.

O erro tipo I do gráfico de T^2 é dado por:

$$\alpha = 1 - \Pr\left(\chi_p^2 < LSC\right) \tag{14}$$

sendo *LSC* o limite superior de controle do gráfico. O *LSC* é determinado de acordo com o *NMAo*=1/ α desejado, sendo este valor uma função do (1-α)-ésimo quantil da distribuição *qui*-quadrado (CHAMP; JONES-FARMER; RIGDON, 2005).

Se uma causa especial ocorre entre os instantes em que se formam os subgrupos racionais *i*-1 e *i*, segue-se que $\overline{\mathbf{Y}}_{i-1} \sim \mathrm{N}_2[\boldsymbol{\mu_0}; \Gamma_{\overline{Y}}]$ e $\overline{\mathbf{Z}}_i \sim \mathrm{N}_2[\boldsymbol{\mu_1}; \Gamma_{\overline{Z}}]$, consequentemente, o erro tipo II para a primeira amostra composta *i* formada depois da ocorrência da causa especial é dado por:

$$\beta_1 = \Pr\left(\chi^2_{(p,\lambda_1)} < LSC\right) \tag{15}$$

sendo, $\lambda_1^2 = \boldsymbol{\delta}^T\, \Gamma_{\overline{M}}^{-1}\boldsymbol{\delta}$ com $\boldsymbol{\delta} = \frac{n_o}{n}(\delta_X, \delta_Y)^T$**.**

Para as sucessivas amostras compostas *i*+1, *i*+2…, $\overline{\mathbf{Y}}_{i-1} \sim \mathrm{N}_2[\boldsymbol{\mu_1}; \Gamma_{\overline{Y}}]$ e $\overline{\mathbf{Z}}_i \sim \mathrm{N}_2[\boldsymbol{\mu_1}; \Gamma_{\overline{Z}}]$, consequentemente, o erro tipo II é dado por:

$$\beta_2 = \Pr\left(\chi^2_{(p,\lambda_2)} < LSC\right) \tag{16}$$

sendo, $\lambda_2^2 = \boldsymbol{\delta}^T\, \Gamma_{\overline{M}}^{-1}\boldsymbol{\delta}$ com $\boldsymbol{\delta} = (\delta_X, \delta_Y)^T$.

Se *NA* é o número de amostras que antecedem um alarme, $P(NA = 1) = 1 - \beta_1$, $P(NA = 2) = \beta_1(1 - \beta_2)$, $P(NA = 3) = \beta_1\beta_2(1 - \beta_2)$, $P(NA = 4) = \beta_1{\beta_2}^2(1 - \beta_2)$ e, em geral,

$$P(NA = l) = \begin{cases} 1 - \beta_1 & \text{se } l = 1 \\ \beta_1\beta_2^{l-2}(1 - \beta_2) & \text{se } l > 1 \end{cases}. \tag{17}$$

O NMA do gráfico de T^2 será:

$$NMA = 1 \times (1-\beta_1) + 2 \times \beta_1(1-\beta_2) + 3 \times \beta_1\beta_2(1-\beta_2) + 4 \times \beta_1\beta_2^2(1-\beta_2) + \cdots$$
$$= 1 - \beta_1 + \beta_1(1-\beta_2)\sum_{l=2}^{\infty} l\beta_2^{l-2}, \quad (18)$$

Dado que a série $\sum_{l=2}^{\infty} l\beta_2^{l-2}$ é convergente, pode-se reescrevê-la para obter o *NMA*.

$$NMA = 1 - \beta_1 + \beta_1(1-\beta_2)\frac{2-\beta_2^2}{(1-\beta_2)^2} = \frac{\beta_1}{(1-\beta_2)} + 1 \quad (19)$$

Se a causa especial ocorrer antes da primeira amostra, então $NMA = 1/(1-\beta_2)$, pois $\beta_1 = \beta_2$.

5. O EFEITO DA AUTOCORRELAÇÃO NO DESEMPENHO DE GRÁFICO DE T^2

Investigou-se nesta seção a influência dos parâmetros de autocorrelação (a, b, c, d), da correlação (ρ) e do deslocamento no vetor de médias (δ_X, δ_Y) no desempenho estatístico do gráfico T^2 de Hotelling.

A estratégia de amostragem composta (MS) é comparada com a estratégia de amostragem padrão (STD). Na estratégia de amostragem STD as unidades da amostra são selecionadas de acordo com o conceito de subgrupos racionais. Assume-se que $\boldsymbol{\Phi}$ permanece inalterado quando o vetor de médias sofre deslocamento e passa para a condição fora de controle estatístico. Com o processo em controle, adotou-se *NMAo* igual a 370,4 e tamanhos de amostras iguais a 3 e 5.

As Tabelas A1 e A2 (ver ANEXO I) apresentam os valores do *NMA* do gráfico de T^2 para ambas as estratégias adotadas (STD e MS). Os menores valores do *NMA* são destacados em negrito. Os níveis de correlação (ρ) adotados são: baixo (0,3), médio (0,6) e alto (0,9). A Tabela A1 considera os casos em que *n*=3 e a Tabela A2 os casos em que *n*=5.

Em geral, o emprego da estratégia de amostragem composta reduz o efeito negativo da autocorrelação no desempenho do gráfico de T^2. Por exemplo, na Tabela A1 verifica-se que na presença de observações moderadamente autocorrelacionadas (*a*=*b*=0,5; $\rho = 0{,}3$) e $\boldsymbol{\delta} = (0{,}5;\ 1{,}0)^T$, o gráfico de T^2 aplicado com a estratégia STD requer, em média, 50,3 amostras para o sinal; o *NMA* reduz para 28,1 (aproximadamente 44% a menos) com a estratégia MS.

Nos cenários em que a variável autocorrelacionada raramente é afetada por uma causa especial e a variável independente é que sofre alguma ação que modifique o valor médio em controle, ou seja, (*a*=0, *b*>0, δ_x>0, δ_y=0) ou (*a*>0, *b*=0, δ_x=0, δ_y>0), a estratégia de amostragem composta reduz o poder do gráfico de T^2. Por exemple, se (*a*=0; *b*=0,5; $\rho = 0{,}3$) e $\boldsymbol{\delta} = (1{,}0;\ 0)^T$, o gráfico de T^2 com a estratégia STD requer, em média, 5,7 amostras para dar o sinal, veja a Tabela A2. Com a estratégia MS, o *NMA* aumenta para 6,6.

Em muitas aplicações a magnitude do deslocamento da média é difícil de ser predita. Baseando-se nesse fato, a estratégia MS é recomendada somente para processos com ambas as variáveis autocorrelacionadas.

Em relação aos parâmetros de autocorrelação, é possível inferir que o gráfico de T^2 com a estratégia MS é mais robusto que o gráfico de T^2 com a estratégia STD. Por exemplo, fixando $\delta_X = 1{,}0$, $\delta_Y = 0{,}5$, $\rho = 0{,}6$, $n = 5$ e variando a e b como apresentado na Tabela A2, a amplitude para os valores do *NMA* é igual a 30,9 (=40,5-9,6) para a estratégia MS, e igual a 64,9 (=81,0-16,1) para a estratégia STD. Esses resultados evidenciam que o uso da técnica MS deve ser adotada quando há algum tipo de incerteza acerca no nível de autocorrelação.

As Figuras 2-3 ilustram o desempenho de ambas as técnicas em função do parâmetro de não centralidade (λ). Quanto maior é o valor de λ, melhor é o desempenho do gráfico de controle. A Figura 2 apresenta os cenários em que $a \in \{0{,}1;\ 0{,}49\}$; $b = 0$ e $a = b \in \{0{,}1;\ 0{,}49\}$. A Figura 3 apresenta os casos em que $a \in \{0{,}5;\ 0{,}89\}$; $b = 0$ e $a = b \in \{0{,}5;\ 0{,}89\}$. Observa-se que em todos os cenários a estratégia MS é melhor que a estratégia STD, pois λ_{MS} é sempre superior a λ_{STD}.

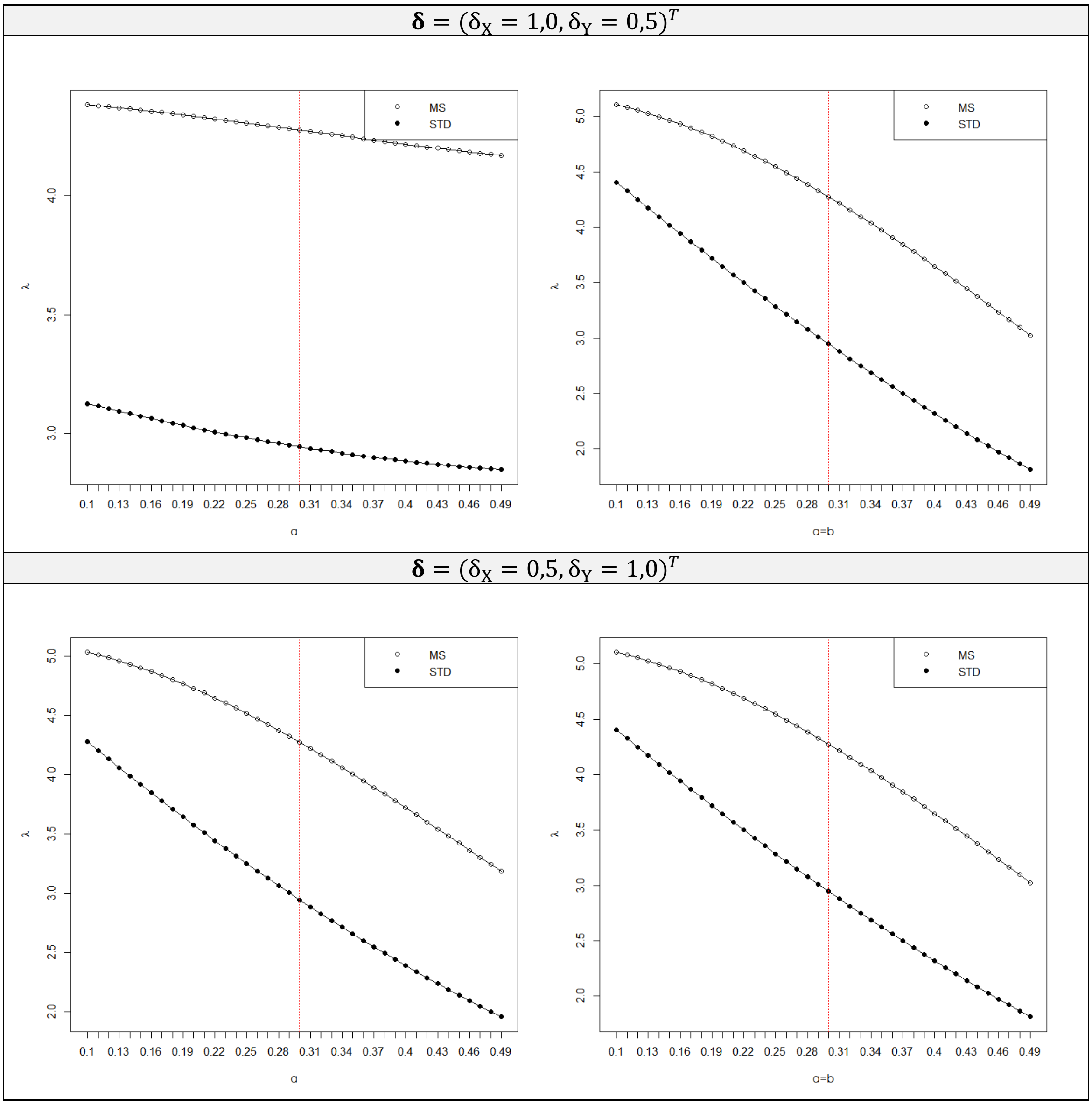
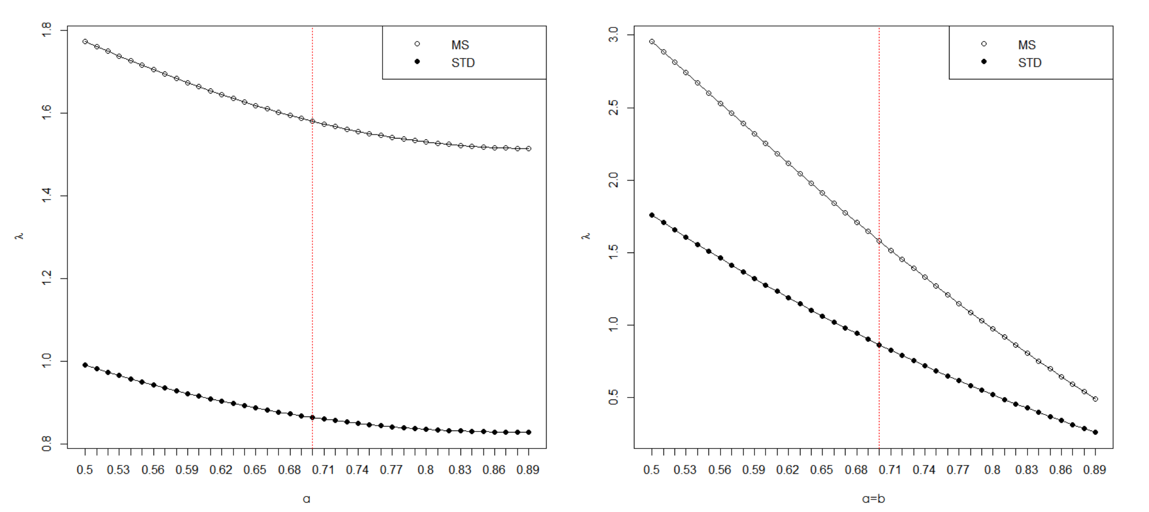


Figura 2: Parâmetro de não centralidade λ; n=5; ρ=0,3; $a \in \{0{,}1;\ 0{,}49\}$; $b = 0$ and $a = b \in \{0{,}1;\ 0{,}49\}$.

$\boldsymbol{\delta} = (\delta_X = 1{,}0, \delta_Y = 0{,}5)^T$



$\boldsymbol{\delta} = (\delta_X = 0{,}5, \delta_Y = 1{,}0)^T$

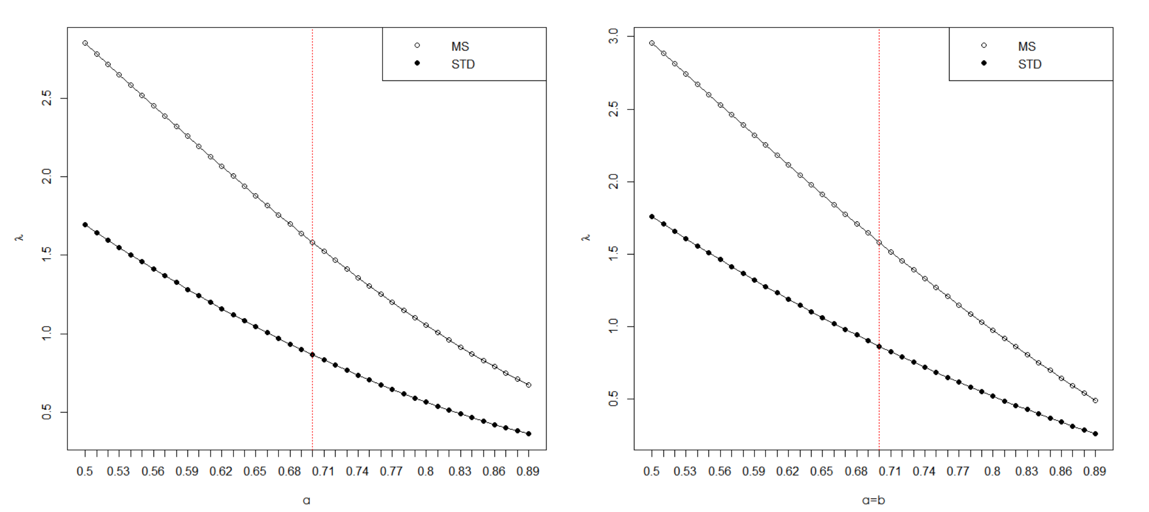


Figura 3: Parâmetro de não centralidade λ; n=5; ρ=0,3; $a \in \{0{,}5;\ 0{,}89\}$; $b = 0$ and $a = b \in \{0{,}5;\ 0{,}89\}$.

6. EXEMPLO ILUSTRATIVO

Montgomery (2009) introduz um processo em que duas características de qualidade são monitoradas: resistência a tração e diâmetro de uma fibra têxtil. O grau de correlação ($\boldsymbol{\rho}$) entre as variáveis é igual a 0,78; $\boldsymbol{\mu_0} = (115{,}9;\ 0{,}0106)'$ e $\boldsymbol{\Sigma_e} = \begin{pmatrix} \sigma_{e_X}^2 & \sigma_{e_{XY}} \\ \sigma_{e_{XY}} & \sigma_{e_Y}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}23 & 0{,}79 \\ 0{,}79 & 0{,}83 \end{pmatrix}$.

O engenheiro de qualidade decide empregar o gráfico de T^2 com amostras de tamanho n=5. Na Tabela 1 a estratégia de amostragem padrão (STD) é comparada com a estratégia de amostragem composta (MS) assumindo que as variáveis resistência a tração e diâmetro são ambas autocorrelacionadas (a = 0,45; b= 0,6).

Observa-se que mesmo para essas variáveis moderadamente autocorrelacionadas, a estratégia MS é vantajosa diante da estratégia STD; por exemplo, com a estratégia STD o *NMA* correspondente a (δ_1=0,5; δ_2=1,0) é igual a 34,66; com a estratégia MS o *NMA* reduz em mais de 55% (*NMA*=15,29). A Tabela 1 revela um percentual médio de redução igual a 47,6 %.

Tabela 1: Valores do *NMA* para o gráfico de T^2.

δ_1	δ_2	**STD**	**MS**	Redução percentual do *NMA* (%)
		NMA		
0	0,5	74,82	39,05	47,81
1	0	9,84	5,29	46,24
0,5	**1**	**34,66**	**15,29**	**55,89**
0,5	0	69,38	39,53	43,02
0	1	11,03	5,23	52,58
0,5	0,5	144,93	93,65	35,38
1	1	34,07	16,35	52,01

7. CONCLUSÃO

O presente artigo considerou o uso do gráfico de controle de T^2 com a estratégia de amostragem composta para monitorar processos bivariados e autocorrelacionados. Com a estratégia composta, a estatística de T^2 depende da matriz de variância-covariância do vetor de médias amostrais formado a partir da combinação dos dois últimos subgrupos racionais.

Os resultados apresentados evidenciaram que a estratégia de amostragem composta é altamente recomendada para controlar o vetor de médias de processos bivariados e autocorrelacionados. Contudo, se no processo em estudo apenas uma variável for autocorrelacionada e robusta ação de causas especiais, a estratégia de amostragem composta deve ser usada com cautela; dependendo do deslocamento ocorrido no vetor de médias, a estratégia composta pode reduzir o poder do gráfico.

Com a intenção de melhorar o desempenho do gráfico de T^2, ou seja, melhorar o poder de detecção de causas especiais atuantes no vetor de médias de processos multivariados com observações autocorrelacionadas, sugere-se, em futuros trabalhos, o emprego dos gráficos de controle EWMA, CUSUM ou esquemas *synthetic* em conjunto com a estratégia de amostragem composta.

8. REFERÊNCIAS

ARKAT, J.; NIAKI, S. T. A.; ABBASI, B. Artificial neural networks in applying MCUSUM residuals charts for AR(1) processes. **Applied Mathematics and Computation**, v. 189, n. 2, p. 1889–1901, jun. 2007.

BILLER, B.; NELSON, B. L. Modeling and generating multivariate time-series input processes using a vector autoregressive technique. **ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation**, v. 13, n. 3, p. 211–237, 1 jul. 2003.

CHAMP, C. W.; JONES-FARMER, L. A.; RIGDON, S. E. Properties of the T 2 Control Chart When Parameters Are Estimated. **Technometrics**, v. 47, n. 4, p. 437–445, nov. 2005.

COSTA, A. F. B.; CASTAGLIOLA, P. Effect of measurement error and autocorrelation on the X_bar chart. **Journal of Applied Statistics**, v. 38, n. 4, p. 661–673, abr. 2011.

COSTA, A. F. B.; EPPRECHT, E. K.; CARPINETTI, L. C. R. **Controle estatístico de qualidade**. 2. ed. São Paulo: Atlas, 2005.

FRANCO, B. C. et al. A new sampling strategy to reduce the effect of autocorrelation on a control chart. **Journal of Applied Statistics**, v. 41, n. 7, p. 1408–1421, 20 dez. 2013.

FRANCO, B. C. et al. Economic design of Shewhart control charts for monitoring autocorrelated data with skip sampling strategies. **International Journal of Production Economics**, v. 151, p. 121–130, maio 2014.

FRANCO, B. C.; COSTA, A. F. B.; MACHADO, M. A. G. Economic-statistical design of the X_bar chart used to control a wandering process mean using genetic algorithm. **Expert Systems with Applications**, v. 39, n. 17, p. 12961–12967, dez. 2012.

HUANG, X.; BISGAARD, S.; XU, N. Model-based multivariate monitoring charts for Autocorrelated processes. **Quality and Reliability Engineering International**, 12 jun. 2013.

HWARNG, H. B.; WANG, Y. Shift detection and source identification in multivariate autocorrelated processes. **International Journal of Production Research**, v. 48, n. 3, p. 835–859, fev. 2010.

ISSAM, B. K.; MOHAMED, L. Support vector regression based residual MCUSUM control chart for autocorrelated process. **Applied Mathematics and Computation**, v. 201, n. 1-2, p. 565–574, jul. 2008.

JARRETT, J. E.; PAN, X. The quality control chart for monitoring multivariate autocorrelated processes. **Computational Statistics and Data Analysis**, v. 51, n. 8, p. 3862–3870, maio 2007.

KALGONDA, A. A. A note on generalization of Z chart. **Journal of Academia and Industrial Research**, v. 1, n. 6, p. 286–289, 2012.

KALGONDA, A. A.; KULKARNI, S. R. Multivariate Quality Control Chart for Autocorrelated Processes. **Journal of Applied Statistics**, v. 31, n. 3, p. 317–327, abr. 2004.

KIM, S. B.; JITPITAKLERT, W.; SUKCHOTRAT, T. One-Class Classification-Based Control Charts for Monitoring Autocorrelated Multivariate Processes. **Communications in Statistics - Simulation and Computation**, v. 39, n. 3, p. 461–474, 24 fev. 2010.

LEONI, R. C.; MACHADO, M. A. G.; COSTA, A. F. B. Simultaneous Univariate X_bar Charts to Control Bivariate Processes with Autocorrelated Data. **Quality and Reliability Engineering International**, n. 1, p. n/a–n/a, 12 jul. 2014.

MASTRANGELO, C. M.; FORREST, D. R. Multivariate autocorrelated processes: Data and shift generation. **Journal of Quality Technology**, v. 34, n. 2, p. 216–221, 2002.

MONTGOMERY, D. C. **Introduction to Statistical Quality Control**. 6. ed. Hoboken, NJ: John Wiley and Sons, Inc., 2009.

NIAKI, S. T. A.; DAVOODI, M. Designing a multivariate–multistage quality control system using artificial neural networks. **International Journal of Production Research**, v. 47, n. 1, p. 251–271, jan. 2009.

SHEWHART, W. A. **Economic control of quality of manufactured product**. New York: D. Van Nostrand Company, 1931.

WU, J.; MAKIS, V. Economic and economic-statistical design of a chi-square chart for CBM. **European Journal of Operational Research**, v. 188, n. 2, p. 516–529, jul. 2008.

ANEXO I: Valores do *NMA* do gráfico de T^2.

Tabela A1. Valores do *NMA*; $n = 3$.

		a	0,3		0,5		0,7		0,9		0,3		0		0,3		0,1		0,7		0,2		0,3	
		b	0,3		0,5		0,7		0,9		0,9		0,5		0,3		0,1		0,7		0,2		0,3	
		c	0		0		0		0		0		0		0,1		0,3		0,2		0,7		0,3	
		d	0		0		0		0		0		0		0,1		0,3		0,2		0,7		0,3	
ρ	δx	δy	STD	MS	STD	MS	STD	MS	STD	MS	STD	MS	STD	MS	STD	MS	STD	MS	STD	MS	STD	MS	STD	MS
0,3	0	0	370,40	370,40	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4
	0	0,5	127,1	**96,6**	171,0	**124,3**	231,4	**177,9**	315,57	**281,64**	318,46	**286,05**	172,9	**126,8**	121,8	**95,6**	**76,34**	88,99	216,3	**169,5**	**49,12**	114,91	105,8	**96,9**
	0	1	26,7	**17,1**	47,2	**26,1**	91,6	**51,6**	211,3	**151,57**	217,42	**158,26**	48,3	**27,0**	24,7	**16,8**	**11,37**	15,05	78,3	**46,8**	**6,04**	22,8	19,3	**17,2**
	0	1,5	7,4	**5,1**	14,7	**7,8**	35,6	**16,9**	126,93	**74,68**	133,21	**79,82**	15,1	**8,0**	6,8	**5,0**	**3,05**	4,55	28,6	**15,0**	**1,8**	6,74	5,2	**5,1**
	0,5	0	127,1	**96,6**	171,0	**124,3**	231,4	**177,9**	315,57	**281,64**	133,34	**102,45**	**84,2**	85,3	121,8	**95,6**	**76,34**	88,99	216,3	**169,5**	**49,12**	114,91	105,8	**96,9**
	0,5	0,5	94,7	**68,6**	135,7	**92,4**	198,1	**142,5**	297,29	**255,51**	134,21	**101,35**	79,2	**68,9**	109,4	**74,9**	109,43	**74,86**	284,8	**235,5**	284,8	**235,45**	151,2	**100,4**
	0,5	1	28,7	**18,5**	50,3	**28,1**	96,2	**54,9**	216,4	**156,97**	114,55	**78,7**	38,7	**24,8**	33,0	**20,1**	25,51	**19,46**	150,0	**97,6**	**41,16**	72,6	43,0	**27,2**
	0,5	1,5	8,6	**5,8**	17,1	**8,9**	40,3	**19,4**	136,45	**82,26**	86,01	**51,93**	15,4	**8,6**	9,4	**6,1**	**5,72**	5,79	56,7	**30,3**	**5,53**	16,79	10,4	**7,5**
	1	0	26,7	**17,1**	47,2	**26,1**	91,6	**51,6**	211,3	**151,57**	29,13	**18,82**	**13,3**	14,1	24,7	**16,8**	**11,37**	15,05	78,3	**46,8**	**6,04**	22,8	19,3	**17,2**
	1	0,5	28,7	**18,5**	50,3	**28,1**	96,2	**54,9**	216,4	**156,97**	30,51	**19,69**	**14,9**	15,2	33,0	**20,1**	25,51	**19,46**	150,0	**97,6**	**41,16**	72,6	43,0	**27,2**
	1	1	16,0	**10,3**	30,1	**15,9**	64,3	**33,5**	176,53	**117,18**	29,49	**18,49**	12,1	**10,3**	20,5	**11,6**	20,46	**11,62**	156,2	**95,8**	156,19	**95,78**	37,0	**18,2**
	1	1,5	6,9	**4,8**	13,7	**7,3**	33,5	**15,9**	122,55	**71,28**	26,4	**15,76**	7,7	**5,7**	8,6	**5,3**	7,54	**5,24**	85,4	**45,0**	**30,09**	36,77	14,4	**7,7**
	1,5	0	7,4	**5,1**	14,7	**7,8**	35,6	**16,9**	126,93	**74,68**	8,2	**5,58**	**3,5**	4,3	6,8	**5,0**	**3,05**	4,55	28,6	**15,0**	**1,8**	6,74	5,2	**5,1**
	1,5	0,5	8,6	**5,8**	17,1	**8,9**	40,3	**19,4**	136,45	**82,26**	8,59	**5,81**	**4,0**	4,7	9,4	**6,1**	**5,72**	5,79	56,7	**30,3**	**5,53**	16,79	10,4	**7,5**
	1,5	1	6,9	**4,8**	13,7	**7,3**	33,5	**15,9**	122,55	**71,28**	8,63	**5,78**	**3,8**	4,3	8,6	**5,3**	7,54	**5,24**	85,4	**45,0**	**30,09**	36,77	14,4	**7,7**
	1,5	1,5	4,3	**3,3**	8,5	**4,8**	22,0	**10,2**	94,54	**50,9**	8,32	**5,49**	**3,2**	3,4	5,5	**3,7**	5,51	**3,67**	78,0	**38,2**	77,97	**38,21**	10,9	**5,4**
0,6	0	0	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4
	0	0,5	93,3	**67,4**	134,1	**91,0**	196,5	**140,9**	296,34	**254,2**	313,44	**279,17**	144,1	**102,7**	85,0	**65,1**	**44,42**	58,81	164,8	**119,1**	**23,13**	69,53	65,8	**62,6**
	0	1	15,6	**10,0**	29,5	**15,6**	63,2	**32,8**	174,89	**115,65**	206,91	**147,95**	33,7	**18,9**	13,5	**9,6**	**5,3**	8,36	43,8	**24,3**	**2,55**	10,47	9,1	**9,1**
	0	1,5	4,2	**3,3**	8,3	**4,7**	21,5	**9,9**	93,15	**49,94**	122,54	**71,97**	9,7	**5,6**	3,6	**3,2**	**1,65**	2,87	13,4	**7,2**	**1,13**	3,38	**2,5**	3,0
	0,5	0	93,3	**67,4**	134,1	**91,0**	196,5	**140,9**	296,34	**254,2**	122,67	**93,48**	**62,7**	65,7	85,0	**65,1**	**44,42**	58,81	164,8	**119,1**	**23,13**	69,53	65,8	**62,6**
	0,5	0,5	114,2	**85,3**	157,4	**111,6**	219,0	**164,3**	309,08	**272,19**	136,63	**105,22**	89,8	**82,5**	130,1	**92,3**	130,05	**92,34**	298,2	**253,9**	298,21	**253,94**	173,2	**120,3**
	0,5	1	29,9	**19,3**	52,1	**29,2**	98,8	**56,7**	219,11	**159,87**	126,12	**89,38**	48,2	**29,3**	32,2	**20,3**	21,02	**19,22**	126,7	**80,8**	**20,91**	51,54	35,4	**25,1**
	0,5	1,5	7,3	**5,0**	14,5	**7,6**	35,0	**16,7**	125,81	**73,81**	98,63	**60,92**	17,1	**8,7**	7,2	**5,1**	**3,63**	4,71	35,8	**18,7**	**2,45**	8,92	6,4	**5,6**
	1	0	15,6	**10,0**	29,5	**15,6**	63,2	**32,8**	174,89	**115,65**	25,03	**16,25**	**8,5**	9,7	13,5	**9,6**	**5,3**	8,36	43,8	**24,3**	**2,55**	10,47	9,1	**9,1**
	1	0,5	29,9	**19,3**	52,1	**29,2**	98,8	**56,7**	219,11	**159,87**	28,77	**18,89**	**13,4**	15,2	32,2	**20,3**	21,02	**19,22**	126,7	**80,8**	**20,91**	51,54	35,4	**25,1**
	1	1	22,1	**14,1**	40,0	**21,7**	80,5	**44,0**	198,21	**138,15**	30,48	**19,66**	14,7	**13,4**	27,8	**15,9**	27,82	**15,94**	178,1	**115,4**	178,13	**115,36**	48,4	**24,7**
	1	1,5	8,6	**5,8**	16,9	**8,9**	40,0	**19,3**	135,86	**81,79**	29,55	**18,18**	10,5	**7,4**	10,3	**6,3**	8,01	**6,15**	82,1	**44,5**	**17,32**	31,65	15,0	**8,8**
	1,5	0	4,2	**3,3**	8,3	**4,7**	21,5	**9,9**	93,15	**49,94**	6,89	**4,87**	**2,4**	3,2	3,6	**3,2**	**1,65**	2,87	13,4	**7,2**	**1,13**	3,38	**2,5**	3,0
	1,5	0,5	7,3	**5,0**	14,5	**7,6**	35,0	**16,7**	125,81	**73,81**	7,73	**5,4**	**3,2**	4,2	7,2	**5,1**	**3,63**	4,71	35,8	**18,7**	**2,45**	8,92	6,4	**5,6**
	1,5	1	8,6	**5,8**	16,9	**8,9**	40,0	**19,3**	135,86	**81,79**	8,36	**5,75**	**3,9**	4,7	10,3	**6,3**	8,01	**6,15**	82,1	**44,5**	**17,32**	31,65	15,0	**8,8**
	1,5	1,5	6,0	**4,3**	12,0	**6,4**	29,7	**13,9**	114,1	**64,89**	8,64	**5,82**	**3,9**	4,1	7,8	**4,8**	7,77	**4,79**	95,9	**49,8**	95,91	**49,76**	15,2	**7,3**
0,9	0	0	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4
	0	0,5	20,4	**13,0**	37,3	**20,1**	76,3	**41,2**	192,9	**132,88**	302,53	**264,82**	74,1	**53,0**	16,6	**12,0**	**5,97**	10,31	46,3	**26,1**	**2,57**	10,95	**10,2**	10,7
	0	1	2,3	**2,2**	4,3	**2,9**	11,4	**5,5**	60,74	**29,43**	185,85	**128,49**	10,9	**7,3**	**1,9**	2,1	**1,11**	1,98	5,6	**3,5**	**1**	2,03	**1,4**	2,0
	0	1,5	1,1	**1,4**	1,4	**1,6**	3,1	**2,2**	20,36	**8,81**	102,7	**58,25**	2,9	**2,6**	**1,0**	1,3	**1**	1,25	**1,7**	1,8	**1**	1,28	**1,0**	1,3
	0,5	0	20,4	**13,0**	37,3	**20,1**	76,3	**41,2**	192,9	**132,88**	102,82	**77,4**	**23,5**	29,8	16,6	**12,0**	**5,97**	10,31	46,3	**26,1**	**2,57**	10,95	**10,2**	10,7
	0,5	0,5	131,4	**100,5**	175,6	**128,7**	235,4	**182,4**	317,6	**284,64**	130,82	**102,75**	**83,3**	91,3	147,8	**108,2**	147,84	**108,19**	308,0	**268,0**	307,98	**267,99**	191,2	**137,7**
	0,5	1	12,0	**7,8**	23,2	**12,1**	52,0	**26,1**	157,5	**99,98**	134,33	**98,44**	52,8	**27,4**	10,9	**7,6**	**4,68**	6,82	41,1	**22,4**	**2,52**	9,96	8,1	**7,7**
	0,5	1,5	1,9	**2,0**	3,4	**2,5**	9,0	**4,5**	51,42	**24,14**	110,33	**69,44**	11,8	**5,8**	**1,7**	2,0	**1,09**	1,84	5,3	**3,4**	**1**	2	**1,3**	1,9
	1	0	2,3	**2,2**	4,3	**2,9**	11,4	**5,5**	60,74	**29,43**	18,39	**12,2**	**2,6**	4,0	**1,9**	2,1	**1,11**	1,98	5,6	**3,5**	**1**	2,03	**1,4**	2,0
	1	0,5	12,0	**7,8**	23,2	**12,1**	52,0	**26,1**	157,5	**99,98**	23,6	**15,95**	**6,1**	9,7	10,9	**7,6**	**4,68**	6,82	41,1	**22,4**	**2,52**	9,96	8,1	**7,7**
	1	1	28,4	**18,3**	49,8	**27,8**	95,5	**54,3**	215,58	**156,1**	28,13	**18,91**	**13,0**	15,7	35,4	**20,6**	35,39	**20,59**	196,1	**132,6**	196,08	**132,57**	59,6	**31,4**
	1	1,5	5,7	**4,1**	11,4	**6,2**	28,6	**13,3**	111,29	**62,81**	30,43	**19,61**	13,6	**8,9**	5,8	**4,2**	**3,19**	3,97	33,0	**16,9**	**2,42**	8,38	5,6	**4,8**
	1,5	0	1,1	**1,4**	1,4	**1,6**	3,1	**2,2**	20,36	**8,81**	4,92	**3,81**	**1,1**	1,9	**1,0**	1,3	**1**	1,25	**1,7**	1,8	**1**	1,28	**1,0**	1,3
	1,5	0,5	1,9	**2,0**	3,4	**2,5**	9,0	**4,5**	51,42	**24,14**	5,93	**4,46**	**1,5**	2,6	**1,7**	2,0	**1,09**	1,84	5,3	**3,4**	**1**	2	**1,3**	1,9
	1,5	1	5,7	**4,1**	11,4	**6,2**	28,6	**13,3**	111,29	**62,81**	6,96	**5,11**	**2,3**	3,9	5,8	**4,2**	**3,19**	3,97	33,0	**16,9**	**2,42**	8,38	5,6	**4,8**
	1,5	1,5	8,0	**5,4**	15,8	**8,3**	37,7	**18,1**	131,3	**78,13**	7,87	**5,61**	**3,5**	4,7	10,3	**6,1**	10,32	**6,09**	112,1	**61,0**	112,09	**61,01**	19,9	**9,5**

Tabela A2. Valores do *NMA*; *n*= 5.

		a	0,3		0,5		0,7		0,9		0,3		0		0,3		0,1		0,7		0,2		0,3	
		b	0,3		0,5		0,7		0,9		0,9		0,5		0,3		0,1		0,7		0,2		0,3	
		c	0		0		0		0		0		0		0,1		0,3		0,2		0,7		0,3	
		d	0		0		0		0		0		0		0,1		0,3		0,2		0,7		0,3	
ρ	δx	δy	STD	MS	STD	MS	STD	MS	STD	MS	STD	MS	STD	MS	STD	MS	STD	MS	STD	MS	STD	MS	STD	MS
0,3	0	0	370,40	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4
	0	0,5	88,02	**59,47**	137,69	**88,28**	211,75	**149,26**	312,11	**271,46**	314,94	**276,04**	138,95	**90,29**	83,08	**58,53**	**36,03**	49,82	201,74	**144,03**	**18,06**	68,84	63,83	**57,1**
	0	1	14,23	**8,54**	30,93	**14,92**	74,6	**36,54**	204,22	**137,2**	209,98	**143,5**	31,46	**15,44**	12,98	**8,36**	**4,1**	6,86	66,96	**34,17**	**2,04**	10,38	8,7	**8,1**
	0	1,5	3,78	**2,98**	8,79	**4,57**	26,79	**11,26**	119,89	**64,24**	125,6	**68,73**	8,97	**4,71**	3,46	**2,94**	**1,4**	2,59	23,17	**10,44**	**1,06**	3,42	**2,4**	2,88
	0,5	0	88,02	**59,47**	137,69	**88,28**	211,75	**149,26**	312,11	**271,46**	93,05	**63,75**	**46,84**	48,13	83,08	**58,53**	**36,03**	49,82	201,74	**144,03**	**18,06**	68,84	63,83	**57,1**
	0,5	0,5	61,37	**39,29**	104,25	**61,75**	177,01	**115,03**	292,92	**243,47**	95,67	**64,7**	46,2	**39,37**	73,01	**43,46**	73,01	**43,46**	253,8	**191,73**	253,8	**191,73**	108,06	**61,78**
	0,5	1	15,44	**9,22**	33,22	**16,11**	78,75	**39,09**	209,41	**142,5**	84,63	**52,48**	22,56	**13,5**	17,91	**9,99**	11,62	**9,41**	121,82	**68,46**	**15,37**	40,34	22,68	**13,39**
	0,5	1,5	4,39	**3,29**	10,25	**5,17**	30,6	**12,97**	129,26	**71,19**	66,08	**36,18**	8,87	**4,95**	4,73	**3,4**	**2,41**	3,15	43,43	**19,69**	**1,94**	7,79	4,74	**3,91**
	1	0	14,23	**8,54**	30,93	**14,92**	74,6	**36,54**	204,22	**137,2**	15,58	**9,35**	**5,68**	6,58	12,98	**8,36**	**4,1**	6,86	66,96	**34,17**	**2,04**	10,38	8,7	**8,1**
	1	0,5	15,44	**9,22**	33,22	**16,11**	78,75	**39,09**	209,41	**142,5**	16,45	**9,83**	**6,5**	7,16	17,91	**9,99**	11,62	**9,41**	121,82	**68,46**	**15,37**	40,34	22,68	**13,39**
	1	1	8,22	**5,26**	18,83	**8,97**	50,66	**22,89**	169,13	**103,9**	16,3	**9,54**	5,58	**5,27**	10,62	**5,86**	10,62	**5,86**	114,98	**60,34**	114,98	**60,34**	20,02	**8,97**
	1	1,5	3,53	**2,86**	8,18	**4,32**	25,15	**10,55**	115,59	**61,15**	15,18	**8,59**	3,86	**3,36**	4,35	**3,06**	3,57	**3,01**	59,1	**26,48**	**11,53**	18,91	6,99	**4,05**
	1,5	0	3,78	**2,98**	8,79	**4,57**	26,79	**11,26**	119,89	**64,24**	4,14	**3,17**	**1,72**	2,53	3,46	**2,94**	**1,4**	2,59	23,17	**10,44**	**1,06**	3,42	**2,4**	2,88
	1,5	0,5	4,39	**3,29**	10,25	**5,17**	30,6	**12,97**	129,26	**71,19**	4,33	**3,27**	**1,88**	2,7	4,73	**3,4**	**2,41**	3,15	43,43	**19,69**	**1,94**	7,79	4,74	**3,91**
	1,5	1	3,53	**2,86**	8,18	**4,32**	25,15	**10,55**	115,59	**61,15**	4,4	**3,29**	**1,87**	2,56	4,35	**3,06**	3,57	**3,01**	59,1	**26,48**	**11,53**	18,91	6,99	**4,05**
	1,5	1,5	2,29	**2,24**	5,04	**3,08**	16,1	**6,82**	88,32	**42,88**	4,34	**3,22**	**1,7**	2,24	2,86	**2,37**	2,86	**2,37**	49,21	**20,66**	49,21	**20,66**	5,39	**3,08**
0,6	0	0	370,4	370,40	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4
	0	0,5	60,28	**38,5**	102,79	**60,67**	175,37	**113,51**	291,92	**242,07**	308,79	**267,84**	109,17	**69,71**	53,49	**36,82**	**17,85**	29,61	151,49	**97,59**	**7,39**	36,55	35,14	**33,29**
	0	1	8,01	**5,15**	18,39	**8,76**	49,7	**22,38**	167,49	**102,45**	197,65	**132,39**	20,38	**10,56**	6,78	**4,92**	**2,02**	4	37,1	**17,45**	**1,19**	4,88	**3,98**	4,46
	0	1,5	2,24	**2,21**	4,92	**3,03**	15,71	**6,66**	86,97	**42,03**	113,57	**60,91**	5,49	**3,47**	**1,96**	2,16	**1,06**	1,96	10,93	**5,26**	**1**	2,15	**1,38**	2,06
	0,5	0	60,28	**38,5**	102,79	**60,67**	175,37	**113,51**	291,92	**242,07**	82,52	**56,3**	**31,54**	34,82	53,49	**36,82**	**17,85**	29,61	151,49	**97,59**	**7,39**	36,55	35,14	**33,29**
	0,5	0,5	77,17	**51,04**	124,53	**77,48**	198,67	**135,89**	305,29	**261,27**	95,33	**66,04**	51,84	**48,26**	90,37	**56,06**	90,37	**56,06**	270,65	**212,89**	270,65	**212,89**	128,6	**77,5**
	0,5	1	16,12	**9,61**	34,5	**16,79**	81,02	**40,52**	212,17	**145,37**	93,07	**59,94**	29,7	**16,51**	17,41	**10,11**	**8,7**	9,11	105,27	**57,87**	**6,81**	26,29	17,68	**12,2**
	0,5	1,5	3,72	**2,95**	8,63	**4,51**	26,37	**11,08**	118,79	**63,45**	77,24	**43,56**	10,27	**5,12**	3,65	**2,97**	**1,61**	2,68	28,21	**12,6**	**1,18**	4,31	**2,91**	3,09
	1	0	8,01	**5,15**	18,39	**8,76**	49,7	**22,38**	167,49	**102,45**	12,84	**7,96**	**3,52**	4,66	6,78	**4,92**	**2,02**	4	37,1	**17,45**	**1,19**	4,88	**3,98**	4,46
	1	0,5	16,12	**9,61**	34,5	**16,79**	81,02	**40,52**	212,17	**145,37**	14,87	**9,18**	**5,49**	6,99	17,41	**10,11**	**8,7**	9,11	105,27	**57,87**	**6,81**	26,29	17,68	**12,2**
	1	1	11,56	**7,06**	25,71	**12,28**	64,74	**30,69**	190,95	**124,09**	16,21	**9,81**	**6,5**	6,6	14,85	**7,92**	14,85	**7,92**	135,91	**75,85**	135,91	**75,85**	27,26	**12,28**
	1	1,5	4,35	**3,27**	10,15	**5,13**	30,36	**12,86**	128,68	**70,75**	16,47	**9,59**	5,24	**4,17**	5,17	**3,48**	3,59	**3,36**	59,63	**27,39**	**5,84**	15,61	7,14	**4,5**
	1,5	0	2,24	**2,21**	4,92	**3,03**	15,71	**6,66**	86,97	**42,03**	3,42	**2,85**	**1,29**	2,1	**1,96**	2,16	**1,06**	1,96	10,93	**5,26**	**1**	2,15	**1,38**	2,06
	1,5	0,5	3,72	**2,95**	8,63	**4,51**	26,37	**11,08**	118,79	**63,45**	3,79	**3,05**	**1,55**	2,48	3,65	**2,97**	**1,61**	2,68	28,21	**12,6**	**1,18**	4,31	**2,91**	3,09
	1,5	1	4,35	**3,27**	10,15	**5,13**	30,36	**12,86**	128,68	**70,75**	4,1	**3,2**	**1,8**	2,69	5,17	**3,48**	3,59	**3,36**	59,63	**27,39**	**5,84**	15,61	7,14	**4,5**
	1,5	1,5	3,1	**2,64**	7,1	**3,89**	22,16	**9,27**	107,32	**55,36**	4,31	**3,28**	**1,9**	2,54	3,95	**2,84**	3,95	**2,84**	63,05	**27,83**	63,05	**27,83**	7,59	**3,89**
0,9	0	0	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4	370,4
	0	0,5	10,63	**6,55**	23,85	**11,36**	61,06	**28,59**	185,6	**118,98**	294,86	**250,48**	42,94	**31,44**	47,39	**6,07**	**2,18**	4,71	40,13	**19,24**	**1,19**	5,07	**4,39**	5,11
	0	1	1,41	**1,76**	2,62	**2,16**	8,16	**3,88**	55,94	**24,25**	172,38	**111,47**	5,08	**4,23**	5,76	**1,71**	**1**	1,57	4,67	**2,88**	**1**	1,61	**1,04**	1,62
	0	1,5	1,01	**1,19**	1,14	**1,43**	2,28	**1,93**	18,29	**7,23**	91,02	**47,39**	**1,6**	2,01	1,74	**1,16**	**1**	1,08	**1,51**	1,68	**1**	1,1	**1**	1,1
	0,5	0	10,63	**6,55**	23,85	**11,36**	61,06	**28,59**	185,6	**118,98**	63,57	**43,53**	**8,32**	13,73	42,95	**6,07**	**2,18**	4,71	40,13	**19,24**	**1,19**	5,07	**4,39**	5,11
	0,5	0,5	91,81	**62,47**	142,16	**92,05**	216,03	**153,78**	314,26	**274,71**	85,75	**61,32**	**39,58**	52,31	92,86	**68,19**	106,14	**68,19**	283,26	**229,61**	283,26	**229,61**	146,35	**92,09**
	0,5	1	6,1	**4,16**	14,2	**6,87**	40,27	**17,56**	150,12	**87,65**	96,41	**65,14**	35,18	**16,22**	17,65	**4,07**	**1,87**	3,45	34,06	**15,72**	**1,19**	4,7	**3,59**	3,91
	0,5	1,5	1,26	**1,65**	2,16	**1,98**	6,47	**3,31**	47,13	**19,79**	87,28	**50,87**	7,12	**3,68**	3,47	**1,62**	**1**	1,5	4,32	**2,74**	**1**	1,6	**1,03**	1,56
	1	0	1,41	**1,76**	2,62	**2,16**	8,16	**3,88**	55,94	**24,25**	8,65	**5,87**	**1,25**	2,37	5,08	**1,71**	**1**	1,57	4,67	**2,88**	**1**	1,61	**1,04**	1,62
	1	0,5	6,1	**4,16**	14,2	**6,87**	40,27	**17,56**	150,12	**87,65**	11,12	**7,41**	**2,14**	4,39	14,78	**4,07**	**1,87**	3,45	34,06	**15,72**	**1,19**	4,7	**3,59**	3,91
	1	1	15,24	**9,11**	32,84	**15,91**	78,07	**38,67**	208,58	**141,64**	13,65	**8,88**	**4,59**	7,27	15,52	**10,25**	19,42	**10,25**	153,85	**90,26**	153,85	**90,26**	34,71	**15,92**
	1	1,5	2,96	**2,57**	6,77	**3,76**	21,22	**8,88**	104,59	**53,49**	15,66	**9,76**	6,47	**5,01**	5,51	**2,61**	**1,49**	2,41	25,4	**11,18**	**1,17**	4,11	**2,61**	2,78
	1,5	0	1,01	**1,19**	1,14	**1,43**	2,28	**1,93**	18,29	**7,23**	2,39	**2,37**	**1**	1,52	1,6	**1,16**	**1**	1,08	**1,51**	1,68	**1**	1,1	**1**	1,1
	1,5	0,5	1,26	**1,65**	2,16	**1,98**	6,47	**3,31**	47,13	**19,79**	2,78	**2,6**	**1,03**	1,83	2,93	**1,62**	**1**	1,5	4,32	**2,74**	**1**	1,6	**1,03**	1,56
	1,5	1	2,96	**2,57**	6,77	**3,76**	21,22	**8,88**	104,59	**53,49**	3,2	**2,84**	**1,16**	2,3	4,73	**2,61**	**1,49**	2,41	25,4	**11,18**	**1,17**	4,11	**2,61**	2,78
	1,5	1,5	4,05	**3,12**	9,44	**4,84**	28,5	**12,02**	124,2	**67,4**	3,63	**3,06**	**1,5**	2,69	4,13	**3,39**	5,21	**3,39**	76,17	**35,23**	76,17	**35,23**	10,08	**4,84**